

Table des matières

1	Analyse	2
1.1	Etude de fonction	2
	Exercice 1. Développements limités	2
	Exercice 2. Etude des variations et équivalence [Edhec 2008]	2
	Exercice 3. Etude de fonction et suite définie par récurrence [ESC 2000]	2
1.2	Suites et séries	3
	Exercice 4. Suites et inégalité des accroissements finis	3
	Exercice 5. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 [Ecricome 1999]	3
	Exercice 6. Suites implicites et intégrales [EM Lyon 2002]	4
	Exercice 7. Calcul de sommes partielles	5
	Exercice 8. Convergence de séries	5
1.3	Intégration	5
	Exercice 9. Intégration [Edhec 2014]	5
1.4	Fonction de deux variables	6
	Exercice 10. Fonction de deux variables [Edhec 1998]	6
2	Algèbre	6
2.1	Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires	6
	Exercice 11. Résolution de systèmes linéaires	6
	Exercice 12. Inversion de matrice	6
	Exercice 13. Suite matricielle récurrente linéaire d'ordre 2 [EM Lyon 2003]	6
	Exercice 14. Calcul matriciel et chaînes de Markov [Ecricome 2001]	7
	Exercice 15. Equation matricielle [ESCP 1998]	8
2.2	Espaces vectoriels	8
	Exercice 16. Base d'un espace vectoriel	8
	Exercice 17. Rang d'une famille	8
2.3	Applications linéaires	9
	Exercice 18. Endomorphisme de l'espace des matrices	9
	Exercice 19. Un autre endomorphisme de l'espace des matrices [EM Lyon 2008]	9
	Exercice 20. Changement de base [Edhec 2005]	10
2.4	Diagonalisation	10
	Exercice 21. Endomorphisme de carré diagonalisable [Edhec 2012]	10
	Exercice 22. Diagonalisation et calcul de puissances [Ecricome 2009]	11
	Exercice 23. Etude d'une suite de matrices [Ecricome 2012]	12
	Exercice 24. Les valeurs propres de ces matrices sont sur leur diagonale [ESSEC 2010 Maths I]	13
	Exercice 25. Endomorphisme d'un espace vectoriel de polynômes [Ecricome 2006]	14
	Exercice 26. Diagonalisation dépendant d'un paramètre [EM Lyon 1994]	14
	Exercice 27. Automorphisme d'un espace vectoriel de polynômes [HEC 2013]	14
3	Probabilité	15
3.1	Variables aléatoires discrètes	15
	Exercice 28. Calcul d'intégrales et de sommes [Edhec 2015]	15
	Exercice 29. Probabilités conditionnelles [Edhec 2004]	16
	Exercice 30. Couple de variables aléatoires et droite de régression [EM Lyon 2009]	17
3.2	Variables aléatoires à densité	18
	Exercice 31. Partie entière d'une variable aléatoire à densité [Edhec 2002]	18
	Exercice 32. Utilisation de la loi normale [Edhec 2001]	18
	Exercice 33. Variables aléatoires à densité et variables indicatrices [Edhec 2006]	18
	Exercice 34. Variables aléatoires discrètes et à densité [EM Lyon 2011]	19
3.3	Estimation	20
	Exercice 35. Intervalle de confiance [HEC 2008]	20

1 Analyse

1.1 Etude de fonction

Exercice 1. Développements limités

Soit f la fonction pour tout $x \in \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{1+x} + \ln(1+x)$.

1. Donner le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.

Exercice 2. Etude des variations et équivalence [Edhec 2008]

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n , par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + n x.$$

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x , $f'_n(x)$ et $f''_n(x)$.
(b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
(b) Montrer que les droites (D_n) et (D'_n) d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n) .
(c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté A_n de (C_n) .
(d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1 , puis tracer sur un même dessin les droites (D_1) , (D'_1) et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1) .
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .
(b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < u_n < 0$.
(c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
(d) En revenant à la définition de u_n , montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}$.

Exercice 3. Etude de fonction et suite définie par récurrence [ESC 2000]

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1}$$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- (a) Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$
(b) Calculer une équation de la tangente T à C à l'abscisse 0.
(c) Etudier les positions relatives de C et T . Préciser les points d'intersection.
(d) Construire C et T .
2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}, \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

- (a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que :

$$f\left(\frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{p+1}$$

- (b) En déduire par récurrence que pour tout entier n ,

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

- (c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(d) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$$

(e) En déduire par récurrence et à l'aide du 2.b) que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

3. (a) Montrer que pour tout réel $x \geq 2$,

$$\frac{1}{x} \leq \ln(x) - \ln(x-1)$$

(b) En déduire que : pour tout entier n ,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq \ln(n)$$

puis que : pour tout entier $n \geq 2$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$$

(c) A l'aide des résultats précédents, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n u_n.$$

4. Ecrire un programme Scilab qui demande à l'utilisateur un entier naturel n et qui affiche la valeur u_n .

1.2 Suites et séries

Exercice 4. Suites et inégalité des accroissements finis

Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution positive de l'équation :

$$2e^{-x} - e^{-2x} = x$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$. On donne $f(1/2) \approx 0,84$ et $f(1) \approx 0,60$.

1. Etudier les variations de f ainsi que sa limite en $+\infty$.

Construire la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}^+$.

2. (a) Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = f(x) - x$ sur $\mathbb{R}^+$.

(b) En déduire que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution positive notée α et que $1/2 \leq \alpha \leq 1$.

3. Montrer que si $0 \leq x \leq 1$, alors $0 \leq x - x^2 \leq 1/4$.

En déduire que, pour tout $x \in [1/2, 1]$, on a $|f'(x)| \leq 1/2$.

4. Soit u la suite définie par : $u_0 = 1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que pour tout n entier,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|.$$

(b) En déduire que pour tout n entier,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

(c) Montrer enfin que la suite u est convergente et préciser sa limite.

5. Ecrire un programme en Scilab qui calcule une valeur de u_n qui soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

On stockera pour cela les valeurs successives de u_n dans une variable U et celles de $1/2^{n+1}$ dans p .

Exercice 5. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 [Ecricome 1999]

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n , la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0.$$

On donne : $\frac{1 + \sqrt{13}}{6} \approx 0,77$ et $\frac{1 - \sqrt{13}}{6} \approx -0,44$. a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.

On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

- 1.a. Montrer que, pour tout entier naturel n , u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.
- 1.b. Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.
- 1.c. Ecrire un programme en Scilab qui calcule et affiche la valeur de u_n pour des valeurs de a et b réelles supérieures ou égales à 1 et de n entier supérieur ou égal à 2, entrées par l'utilisateur.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

- 2.a. Montrer que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.
- 2.b. Vérifier, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}.$$

En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}| + |v_n|)$.

- 2.c. On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n ,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que, pour tout entier naturel n , $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n) .

Exercice 6. Suites implicites et intégrales [EM Lyon 2002]

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

I. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1} \quad \text{où } P'_n \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .
3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.
4. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

II. Limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt.$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt = \int_0^1 \frac{1 - t^{2n}}{t + 1} dt.$$

3. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n} - 1}{t + 1} dt \geq \frac{n}{2}(x_n - 1)^2,$$

puis :

$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\sqrt{n}}.$$

5. Conclure quant à la convergence et à la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 7. Calcul de sommes partielles

On considère la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

- Donner la définition de sa N ème somme partielle S_N .
- Calculer S_N pour $N \in \mathbb{N}^*$.
- En déduire que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 8. Convergence de séries

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes

$$1. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{5^n} \quad 2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(-1)^n}{3^n} \quad 3. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n!} \quad 4. \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n 2^n}{n!}$$

1.3 Intégration

Exercice 9. Intégration [Edhec 2014]

- Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x .

On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

- Etablir que f est impaire.
- (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
(b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x , et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- (a) En utilisant la relation $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + 2t + 1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leq f(x) \leq \ln(2)$$

- (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
(c) Dresser le tableau de variation complet de f .
(d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- (a) Montrer que pour tout réel x , on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
(b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
(c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
- Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
(a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1} (1 + \sqrt{t^2+1})} dt$$

- (b) En déduire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leq x - f(x) \leq \frac{7}{6}x^3$$

- (c) Conclure que $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0^+$.
(d) Montrer que l'on a aussi : $\frac{f(x)}{x} \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0^-$.

1.4 Fonction de deux variables

Exercice 10. Etude classique [Edhec 1998]

On considère la fonction de deux variables réelles f définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x (\ln(x) + x + y^2).$$

- (a) Écrire des commandes permettant de tracer la nappe représentant la fonction f sur $[0.01, 2] \times [-2, 2]$ en utilisant la fonction `fplot3d`.
(b) Écrire des commandes permettant de visualiser les lignes de niveau $-0.25, 0, 1, 2, 3$ de f .
(c) Calculer le vecteur $\nabla(f)(1, 0)$. À l'aide de la fonction `xarrows`, écrire une commande permettant de tracer le vecteur d'origine $(1, 0)$ et égal à $\frac{1}{6}\nabla(f)(1, 0)$, ainsi que les lignes de niveau de la question précédente.
- On considère la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$
 - Etudier les variations de g et donner les limites de g en 0^+ et en $+\infty$.
 - En déduire qu'il existe un unique réel α , élément de $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
- (a) Déterminer le seul point critique de f , que l'on notera (x_0, y_0) .
(b) Vérifier que f présente un minimum local en (x_0, y_0) .
(c) Montrer que $f(x_0, y_0) = -\alpha(\alpha + 1)$.

2 Algèbre

2.1 Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires

Exercice 11. Résolution de systèmes linéaires

Résoudre le système suivant en discutant suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} \alpha x + z &= 1 \\ x + \alpha y + z &= 1 \\ x + y + \alpha z &= 1 \end{cases}$$

Exercice 12. Inversion de matrice

Calculer l'inverse de la matrice carrée A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13. Suite matricielle récurrente linéaire d'ordre 2 [EM Lyon 2003]

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer A^2 et A^3 , puis vérifier :
$$A^3 = A^2 + 2A.$$
- Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un couple unique (a_n, b_n) de nombres réels tel que :

$$A^n = a_n A + b_n A^2,$$

et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

- Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n donné supérieur ou égal à 1.
- (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

- En déduire a_n et b_n en fonction de n , pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
- Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n , pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Exercice 14. Calcul matriciel et chaines de Markov [Ecricome 2001]**Première partie**

Le but de la première partie est de calculer les puissances successives de la matrice :

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$$

où a représente un nombre réel.

1. Montrer que, pour tous réels a, b , on a : $M(a).M(b) = M(a+b-3ab)$.
2. Montrer que si $a \neq 1/3$ il existe alors un réel b tel que $a+b-3ab=0$. En déduire que si $a \neq 1/3$ alors la matrice $M(a)$ est inversible.

Calculer $[M(1/3)]^2$ et en déduire que $M(1/3)$ n'est pas inversible.

3. Déterminer le réel a_0 non nul, tel que :

$$[M(a_0)]^2 = M(a_0)$$

4. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

où I désigne la matrice unité d'ordre 3.

- (a) Montrer que pour tout a , il existe un réel α , que l'on exprimera en fonction de a , tel que :

$$M(a) = P + \alpha Q$$

- (b) Calculer P^2, QP, PQ, Q^2 .
- (c) Pour tout entier naturel n , non nul, montrer que $[M(a)]^n$ s'écrit $x_n P + y_n Q$ avec x_n et y_n des réels.
- (d) Expliciter alors la matrice $[M(a)]^n$.

Deuxième partie**Évolution d'un titre boursier au cours du temps.**

Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in]0, \frac{2}{3}[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, (r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1 , et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

- (a) Exprimer p_n, q_n, r_n en fonction de n, p_1, q_1, r_1 .
 - (b) Étudier la convergence de ces suites.
2. Dans une bourse de valeurs, un titre donné peut monter, rester stable, ou baisser. Dans un modèle mathématique, on considère que :
 - le premier jour le titre est stable ;
 - si un jour n , le titre monte, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\frac{2}{3}$, restera stable avec la probabilité $\frac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\frac{1}{6}$;
 - si un jour n , le titre est stable, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\frac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\frac{2}{3}$, et baissera avec la probabilité $\frac{1}{6}$;
 - si un jour n , le titre baisse, le jour $n+1$, il montera avec la probabilité $\frac{1}{6}$, restera stable avec la probabilité $\frac{1}{6}$, et baissera avec la probabilité $\frac{2}{3}$.

On note M_n (respectivement S_n , respectivement B_n) l'événement "le titre donné monte (respectivement reste stable, respectivement baisse) le jour n ".

- (a) Exprimer les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour $n+1$ en fonction de ces mêmes probabilités au jour n .
- (b) En déduire les probabilités de hausse, de stabilité, et de baisse au jour n .
- (c) Quelles sont les limites de ces probabilités lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 15. Equation matricielle [ESCP 1998]

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) tudier, suivant la parité de n , le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^{n+1} + x^n.$$

- (b) Montrer que dans tous les cas $f\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$.

- (c) Calculer $f(1)$ et en déduire, suivant la parité de n , le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

2. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

- (a) Déterminer la matrice P de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ telle que :

$$A \cdot P = P \cdot D$$

- (b) Montrer que P est inversible et en déduire que $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ et $D = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

3. On considère l'équation matricielle d'inconnue X matrice carrée de taille 2 :

$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A$$

- (a) Montrer que la résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de l'équation d'inconnue Y matrice carrée de taille 2 :

$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = D$$

- (b) Soit Y une solution de (E'_n) . On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

i. Montrer que $D \cdot Y = Y \cdot D$.

ii. En déduire que $b = c = 0$.

iii. Quelles sont les valeurs possibles de a ?

iv. Discuter suivant les valeurs de n , le nombre de solutions de l'équation (E_n) .

- (c) On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$.

Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de α .

2.2 Espaces vectoriels**Exercice 16. Base d'un espace vectoriel**

Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (2, -2, -1)$ et $u_3 = (1, 1, -1)$. Soient

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\} \text{ et } F = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

- Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de E .
- La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Est-ce que $u_3 \in F$?
- Est-ce que $u_3 \in E$?
- Donner une base de $E \cap F$.
- Soit $u_4 = (-1, 7, 5)$, est-ce que $u_4 \in E$? Est-ce que $u_4 \in F$?

Exercice 17. Rang d'une famille

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on donne : $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (-1, 2, 1)$ et $u_3 = (3, -4, -3)$.

- Déterminer le rang de la famille (u_1, u_2, u_3) .
- On note F le sous-espace vectoriel engendré par la famille (u_1, u_2, u_3) . Déterminer une base de F et préciser sa dimension.

2.3 Applications linéaires

Exercice 18. Endomorphisme de l'espace des matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi(M) = AM.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(\varphi)$ et une base de $\text{Im}(\varphi)$.
3. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 19. Un autre endomorphisme de l'espace des matrices [EM Lyon 2008]

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Calcul matriciel

1. Déterminer si la matrice P est inversible (on effectuera des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes de P afin de déterminer son rang).
2. Calculer P^{-1} (en résolvant le système $PX = Y$) et vérifier que $A = P D P^{-1}$.
3. Calculer la matrice $C = P^{-1} B P$ et vérifier que C est diagonale.

Partie 2 : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \rightarrow E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E .
2. Vérifier que f est un endomorphisme de E .
3. Soit $M \in E$, on note $N = P^{-1} M P$.
 - (a) Montrer : $M \in \text{Ker}(f) \iff DN = NC$.
 - (b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.
 - (c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4. (a) En déduire la dimension de $\text{Ker}(f)$.
(b) Donner au moins un élément non nul de $\text{Ker}(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\text{Im}(f)$.

Exercice 20. Changement de base [Edhec 2005]

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on rappelle que $\mathcal{B} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe

$$f(M) = M + (a + d)I_2$$

où I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. (a) Exprimer $f(J_1)$, $f(J_2)$, $f(J_3)$ et $f(J_4)$ comme combinaisons linéaires de J_1 , J_2 , J_3 et J_4 .
(b) Vérifier que la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. (a) Montrer que $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
(b) Écrire la matrice D de f dans la base $\mathcal{C}$.
(c) En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = P D P^{-1}$
4. (a) Déterminer la matrice P^{-1} .
(b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = P D^n P^{-1}$.
(c) En déduire explicitement la matrice A^n .

2.4 Diagonalisation**Exercice 21. Endomorphisme de carré diagonalisable [Edhec 2012]**

1. Montrer que, si f désigne un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ diagonalisable, alors l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ est aussi diagonalisable.

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.

Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. (a) Déterminer la matrice A^2 puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A .
(b) Donner une base (u) de $\text{Ker}(g - Id)$.
(c) Déterminer $\text{Ker}(g + Id)$.
(d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.
3. (a) Résoudre l'équation $A^2 X = -X$, d'inconnue le vecteur X élément de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et en déduire une base (v, w) de $\text{Ker}(g^2 + Id)$.
(b) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w) et conclure.

Exercice 22. Diagonalisation et calcul de puissances [Ecricone 2009]

À tout triplet (a, b, c) de réels, on associe la matrice $M(a, b, c)$ définie par :

$$M(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b, c)$ où a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \{M(a, b, c) \text{ avec } a, b, c \text{ réels}\}$$

I. Recherche d'une base de E .

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ des matrices carrées réelles d'ordre 3.
2. Donner une base de E ainsi que sa dimension.

II. Cas particulier de la matrice $M(1, 2, 3)$.

1. Donner les valeurs propres de $M(1, 2, 3)$.
2. Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$D = P^{-1}M(1, 2, 3)P$$

3. Donner l'expression de P^{-1} et en déduire la matrice $[M(1, 2, 3)]^n$ en fonction de l'entier naturel n .

III. Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 1)$

On pose $J = M(1, 1, 1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Calculer les matrices J^2, J^3 . En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n , pour tout entier naturel $n \geq 3$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$:

$$[M(1, 1, 1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$

L'écriture obtenue est-elle encore valable pour les entiers $n = 0$ et $n = 1$?

3. En déduire l'écriture matricielle de $[M(1, 1, 1)]^n$.

IV. Cas particulier de la matrice $M(1, 1, 2)$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $M(1, 1, 2)$. On définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par :

$$\vec{u} = (1, 0, 0), \vec{v} = (0, 1, 0), \vec{w} = (2, 1, 1)$$

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Prouver que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont deux vecteurs propres de f associés à deux valeurs propres que l'on précisera.
3. Exprimer $f(\vec{v})$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. En déduire la matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$.
4. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

5. Montrer que la matrice de passage R de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ a pour matrice inverse la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Donner une relation reliant les matrices $M(1, 1, 2)$, Q , R et T .
7. Sans l'expliciter, écrire $[M(1, 1, 2)]^n$ en fonction de n , Q , R , T .

Exercice 23. Etude d'une suite de matrices [Ecricone 2012]

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$L = AL + B.$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = L + A^n(U_0 - L).$$

Dans la suite du problème les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :

$$A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note :

- Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
- a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A ;
- b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B ;
- $\text{Im}(b)$ l'image de l'endomorphisme b ;
- $\text{Im}(Id - a)$ l'image de l'endomorphisme $\text{Id} - a$.

2. Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si

$$-x + y + z = 0$$

puis montrer que :

$$\text{Im}(b) = \text{Im}(Id - a)$$

3. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à une base de vecteurs propres de a .
- 4.crire la matrice D de l'endomorphisme a ainsi que la matrice B' de l'endomorphisme b dans cette base de vecteurs propres.
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

6. En écrivant convenablement D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n :

$$A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G.$$

Expliciter uniquement la matrice E sous la forme d'un tableau de nombres.

7. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ telle que :

$$L' = DL' + B'$$

8. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie :

$$L = AL + B.$$

9. tablir que $EL = 0$.

10. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

Exercice 24. Les valeurs propres de ces matrices sont sur leur diagonale [ESSEC 2010 Maths I]

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}, \dots, m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Montrer que toutes les matrices triangulaires supérieures et toutes les matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartiennent à $\mathcal{D}_n$.
2. Si M est une matrice de $\mathcal{D}_n$, établir que pour tout α réel, la matrice $M + \alpha I_n$ est encore un élément de $\mathcal{D}_n$.
3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

- (a) Montrer que la matrice K_n n'appartient pas à $\mathcal{D}_n$.
- (b) L'ensemble $\mathcal{D}_n$ est-il un sous espace-vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

4. (a) Soit (x, y, z) un élément de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.

- (b) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_2$ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

Cette matrice est-elle diagonalisable ?

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

- (a) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de la matrice $M(t)$ selon la valeur de t .

En déduire les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ appartient à $\mathcal{D}_3$.

- (b) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles la matrice $M(t)$ est diagonalisable.

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

1. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Montrer que 0 est une valeur propre de M et que c'est la seule valeur propre de M .

2. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.

Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

- (a) Montrer les inclusions $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3)$.
- (b) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u^2)$ et $\text{Ker}(u^3)$ ne peuvent pas être égaux. Pour cela, montrer que dans le cas contraire, le noyau de u^2 est égal à celui de u^i pour tout entier i supérieur ou égal à 2, et en tirer une contradiction.
- (c) Montrer que les noyaux $\text{Ker}(u)$ et $\text{Ker}(u^2)$ ne peuvent pas être égaux non plus.
- (d) Conclure en considérant la dimension des noyaux mentionnés ci-dessus.

3. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels

$$\gamma(M) = ac + df + be \text{ et } \delta(M) = bc + ade.$$

- (a) Établir l'égalité $M^3 = \gamma(M)M + \delta(M)I_3$.
- (b) Montrer que la matrice M est nilpotente si et seulement si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls.
- (c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.

Justifier qu'il existe une infinité de choix pour le triplet (c, e, f) de $\mathbb{R}^3$ pour lesquels la matrice M est nilpotente.

- (d) En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}_3$ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.
- (e) Exhiber une matrice de $\mathcal{D}_3$ dont tous les coefficients sont non nuls.

Exercice 25. Endomorphisme d'un espace vectoriel de polynômes [Ecricome 2006]

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E , associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel : } \quad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Vérifier que la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, s'écrit sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Quelles sont les valeurs propres de f ? f est-il diagonalisable? f est-il un automorphisme de E ?
4. Déterminer l'image par f des fonctions polynômes R_0, R_1, R_2 définies par :

$$\text{pour tout réel } x : \quad R_0(x) = 1, \quad R_1(x) = x - 1 \text{ et } R_2(x) = (x - 1)^2$$

5. Montrer que $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$ est une base de vecteurs propres de f . Écrire la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ ainsi que la matrice D de f dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Vérifier que pour tout réel x :

$$\begin{cases} R_2x + 2R_1(x) + R_0(x) = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) = P_1(x) \end{cases}$$

En déduire la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$

7. Écrire A^{-1} en fonction de D^{-1} . Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$[A^{-1}]^n = P [D^{-1}]^n P^{-1}$$

et expliciter la troisième colonne de la matrice $[A^{-1}]^n$.

Exercice 26. Diagonalisation dépendant d'un paramètre [EM Lyon 1994]

On considère la matrice $A(a)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de $A(a)$, pour $a \in \mathbb{R}$.
2. Étudier suivant les valeurs du réels a , l'inversibilité de $A(a)$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. On suppose dans cette question 3. seulement : $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq -1$.
 - (a) Montrer que $A(a)$ est diagonalisable.
 - (b) Calculer, pour chacune des valeurs propres de A , un vecteur propre de $A(a)$ associé à cette valeur propre.
4. (a) La matrice $A(0)$ est-elle diagonalisable?
 - (b) Calculer $(A(0))^2$, $(A(0))^3$, et $(A(0))^n$ pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 27. Automorphisme d'un espace vectoriel de polynômes [HEC 2013]

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.

Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. (a) Rappeler la dimension de E .
 - (b) Montrer que f est un endomorphisme de E .
 - (c) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E .
 - (d) La matrice M est-elle inversible? Est-elle diagonalisable? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n .
 - (e) Préciser le noyau $\text{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.

- (f) Déterminer l'image $\text{Im}(f)$ de f .
2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E , et pour tout endomorphisme v de E , on pose $v^0 = \text{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$.
- (a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \text{Ker}(u^3)$. Montrer que la famille $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est une base de E .
- (b) Montrer que g est un automorphisme de E . Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u .
- (c) Établir l'égalité $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(g - \text{id}_E)$
- (d) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g .

3 Probabilité

3.1 Variables aléatoires discrètes

Exercice 28. Calcul d'intégrales et de sommes [Edhec 2015]

Partie I

Dans cette partie, x désigne un réel de $[0, 1[$.

1. (a) Montrer que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt \leq \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}.$$

- (b) En déduire que :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2} dt = 0.$$

2. (a) Pour tout réel t de $[0, 1[$ et pour tout k élément de $\mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j}$.

- (b) En déduire que :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt.$$

- (c) Utiliser la question 1) pour montrer que la série de terme général $\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et exprimer $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

- (d) Conclure que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt.$$

On admet sans démonstration que l'on a aussi :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{x^{2j}}{2j} = \int_0^x \frac{t^{2k+1}}{1-t^2} dt.$$

Partie II

Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne "pile" avec la probabilité p avec $0 < p < 1$ et "face" avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier "pile".

Si N prend la valeur n , le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on désigne par A l'événement : « le joueur gagne ». On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

- Reconnaitre la loi de N .
- (a) Montrer que, si m est un entier naturel, la commande `2*floor(m/2)` renvoie la valeur m si et seulement si m est pair.
- (b) Compléter les commandes Scilab suivantes pour qu'elles simulent N et X puis renvoient l'un des deux messages « le joueur a gagné » ou « le joueur a perdu ».

```

p=input('donner la valeur de p')
N=grand(1,1,'geom', p) // 'geom' désigne une loi géométrique
X=grand(1,1,'uin', 1, N) // 'uin' désigne une loi uniforme discrète
if ----- then disp('-----'), else disp('-----'), end

```

3. (a) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à j , la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j]}(X = 2k + 1)$.
- (b) Donner, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à $j + 1$, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=2j+1]}(X = 2k + 1)$.
- (c) Déterminer $\mathbb{P}_{(N=2j)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j - 1 \rrbracket$.
- (d) Déterminer $\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X = 2k + 1)$ lorsque k appartient à $\llbracket 0, j \rrbracket$.

4. (a) Justifier que

$$\mathbb{P}(X = 2k + 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{[N=n]}(X = 2k + 1).$$

En admettant que l'on peut scinder la somme précédente selon la parité de n , montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\sum_{j=k+1}^{+\infty} \frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{q^{2j+1}}{2j+1} \right).$$

- (b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t} dt.$$

5. (a) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt = 0.$$

- (b) Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \frac{p}{q} \left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)} dt \right).$$

- (c) En déduire que :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{p}{q} \int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)} dt$$

6. (a) Trouver trois constantes réelles a , b et c telles que, pour tout t différent de 1 et de -1, on ait :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}.$$

- (b) Écrire $\mathbb{P}(A)$ explicitement en fonction de q .

- (c) En déduire que $\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}$.

Exercice 29. Probabilités conditionnelles [Edhec 2004]

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité $1/2$ et face également avec la probabilité $1/2$), les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. (a) Déterminer, en argumentant soigneusement, l'ensemble $Z(\Omega)$.
- (b) Pour tout k de $Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(Z = k)$. On distinguera les cas $k = 0$ et $k \geq 1$.
- (c) Vérifier que $\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = 1$.

On dispose de $n + 1$ urnes $U_0, U_1, \dots, U_n$ telles que pour tout k de $\{0, 1, \dots, n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \geq 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Déterminer $X(\Omega)$.
3. (a) Déterminer, en distinguant les cas $i = 0$ et $1 \leq i \leq n$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=0]}(X = i)$.

- (b) Déterminer, en distinguant les cas $i = n$ et $0 \leq i \leq n - 1$, la probabilité $\mathbb{P}_{[Z=n]}(X = i)$.
- (c) Pour tout k de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ déterminer, en distinguant les cas $0 \leq i \leq k$ et $k < i \leq n$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[Z=k]}(X = i)$.
4. (a) Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.
- (b) Montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$.
- (c) Exprimer, pour tout i de $\{1, 2, \dots, n - 1\}$, $\mathbb{P}(X = i)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à réduire.
5. Vérifier, avec les expressions trouvées à la question précédente, que $\sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = i) = 1$.

Exercice 30. Couple de variables aléatoires et droite de régression [EM Lyon 2009]

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q .

Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$ et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T . Pour tout entier $k \geq 1$, donner $\mathbb{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T .
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1. Pour tout entier naturel non nul i , on note :

- B_i l'événement "la i -ème boule tirée est blanche",
- N_i l'événement "la i -ème boule tirée est noire".

1. (a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$:

$$\mathbb{P}(X = k) = q p^{k-1} + p q^{k-1}.$$

- (b) Vérifier que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

- (c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que :

$$E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

2. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = 1])$
(On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

- (b) En déduire :

$$\mathbb{P}(Y = 1) = q(1 + p).$$

- (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y .

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \frac{1}{q}(1 - p + p^2)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.
4. Montrer que les variables aléatoires YZ et $X - 1$ sont égales.
5. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\text{cov}(Y, Z)$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.
6. Soit le programme suivant

$x=[7 \quad 4 \quad 14 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \quad 6 \quad 3];$
 $y=[6 \quad 1 \quad 13 \quad 2 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 2];$
 $\dots$

- Compléter le programme afin de calculer le coefficient de corrélation de x et y .
- Compléter le programme afin de tracer le nuage de point associé à (x, y) ainsi que la droite de régression de y en x .

3.2 Variables aléatoires à densité

Exercice 31. Partie entière d'une variable aléatoire à densité [Edhec 2002]

Pour tout nombre réel x , on note $[x]$ la partie entière de x , c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leq x < [x] + 1$. Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (Y = k) = (k \leq X < k + 1)$

- Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
 - Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k - 1)$.
 - En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
 - Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de Y .
- On pose $Z = X - Y$.
 - Déterminer $Z(\Omega)$.
 - En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer que :

$$\forall x \in [0, 1[, \quad P(Z \leq x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$

- En déduire une densité f de Z .
- Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z . Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 32. Utilisation de la loi normale [Edhec 2001]

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

- Vérifier que f est une densité de probabilité.
La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f .
- Déterminer la fonction de répartition F de X .
 - Calculer la médiane de X c'est-à-dire le réel μ tel que $p(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$.
- On appelle mode de la variable X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X a un seul mode, noté M_o , et le déterminer.
- En utilisant un résultat connu concernant la loi normale, établir que X a une espérance et montrer que

$$E(X) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.$$

- Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la variance de X .

Exercice 33. Variables aléatoires à densité et variables indicatrices [Edhec 2006]

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ \frac{1}{2x^2} & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

- Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant la fonction f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X .

3. Montrer que X a une espérance et que celle-ci vaut $\frac{1}{2}$.

Indication : on pourra vérifier et utiliser la relation suivante pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

4. (a) Déterminer $\mathbb{E}((X-1)^2)$.

(b) En déduire que X a une variance et que

$$\mathbb{V}(X) = \frac{3}{4} - \ln 2.$$

5. On appelle variable indicatrice d'un événement A , la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.

On considère maintenant :

- la variable aléatoire Y , indicatrice de l'événement $\left[X \leq \frac{1}{2}\right]$
- la variable aléatoire Z , indicatrice de l'événement $\left[X > \frac{1}{2}\right]$.

(a) Préciser la relation liant Y et Z puis établir sans calcul que le coefficient de corrélation linéaire de Y et Z , noté $\rho(Y, Z)$, est égal à -1.

(b) En déduire la valeur de la covariance de Y et Z .

Exercice 34. Variables aléatoires discrètes et à densité [EM Lyon 2011]

Les deux parties sont indépendantes. Soit $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. Déterminer la loi de X . Rappeler son espérance et sa variance.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale. Donner son espérance et sa variance.

On note $Y = Z - X$.

3. Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y .
4. (a) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?
- (b) Calculer la covariance du couple (X, Y) .

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p .

1. Rappeler la loi de U , son espérance et sa variance.

On considère une variable aléatoire T telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; +\infty[, \quad \mathbb{P}_{(U=n)}(T > t) = e^{-nt}.$$

2. (a) Montrer : $\forall t \in [0; +\infty[, \quad \mathbb{P}(T > t) = \frac{p e^{-t}}{1 - q e^{-t}}.$

(b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T .

(c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

3. On note $Z = UT$.

(a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[, \quad \mathbb{P}_{(U=n)}(Z > z) = e^{-z}.$

(b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

(c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[, \quad \mathbb{P}(U = n, Z > z) = \mathbb{P}(U = n) \mathbb{P}(Z > z).$

3.3 Estimation

Exercice 35. Intervalle de confiance [HEC 2008]

Pour m entier supérieur ou égal à m , on considère un m -échantillon $(Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $q = 1 - p$ et

$$\overline{Y}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m Y_i$$

On cherche à estimer p .

1. (a) Montrer que $\overline{Y}_m$ est un estimateur sans biais de p ; déterminer son risque quadratique.
(b) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que l'intervalle $\left[\overline{Y}_m - \sqrt{\frac{5}{m}}, \overline{Y}_m + \sqrt{\frac{5}{m}} \right]$ est un intervalle de confiance de p au niveau de confiance 0,95.
2. Soit θ un réel positif et ε un réel strictement positif quelconque.

- (a) Établir l'égalité suivante :

$$\mathbb{P}(\overline{Y}_m - p \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(e^{m\theta\overline{Y}_m} \geq e^{m\theta(p+\varepsilon)})$$

- (b) Montrer que si T est une variable aléatoire discrète finie à valeurs positives d'espérance $E(T)$, et a un réel strictement positif, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}(T \geq a) \leq \frac{E(T)}{a}$$

Indication : il faut démontrer l'inégalité de Markov.

- (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \ln(p e^x + q)$$

Déduire des questions précédentes, l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(\overline{Y}_m - p \geq \varepsilon) \leq e^{m[g(\theta) - \theta(p+\varepsilon)]}$$

- (d) Montrer que la fonction g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, l'inégalité :

$$g''(x) \leq \frac{1}{4}$$

- (e) En déduire l'inégalité suivante :

$$g(\theta) \leq \theta p + \frac{\theta^2}{8}$$

- (f) Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$h(x) = \frac{x^2}{8} - \varepsilon x$$

En déduire l'inégalité :

$$\mathbb{P}(\overline{Y}_m - p \geq \varepsilon) \leq e^{-2m\varepsilon^2}$$