Corrigé du TD n°12

Table des matières

1 Analyse

1.1 Etude de fonction

Exercice 1. Développements limités

Soit f la fonction pour tout $x \in \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{1+x} + \ln(1+x)$.

1. Donnons le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right).$$

2. Étudions la fonction f au voisinage de 0

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)\sqrt{1+x} + \ln(1+x) \\ &\underset{0}{=} (x-1)\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)\right) + x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \\ &\underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8} + o\left(x^3\right) - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right) + x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \\ &\underset{0}{=} -1 + \frac{3}{2}x + \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right) \text{ car } x^3 \underset{0}{=} o\left(x^2\right) \end{aligned}$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ est donc $y = -1 + \frac{3}{2}x$. De plus,

$$f(x) - \left(-1 + \frac{3}{2}x\right) = \frac{x^2}{8} + o\left(x^2\right)$$

On peut donc conclure que la courbe de f est localement au-dessus de la tangente au voisinage de 0.

Exercice 2. Etude des variations et équivalence [Edhec 2008]

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n, par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x$.

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ d'unité 5 cm.

1. (a) Pour tout réel x, comme $1 + e^x \neq 0$, f_n est C^2 sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + n$

$$f_n''(x) = \frac{-e^x\left(1+e^x\right)^2 + 2e^{2x}\left(1+e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^4} = e^x \frac{-\left(1+e^x\right) + 2e^x}{\left(1+e^x\right)^3} = e^x \frac{e^x - 1}{\left(1+e^x\right)^3}$$

(b) $f_n''(x)$ est donc du signe de $e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$		$\searrow +$	$n - \frac{1}{4} > 0$	$\nearrow +$	
$f_n(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

Et comme $f_n'(0) = n - \frac{1}{4} > 0$ alors $f_n' > 0$ et

Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

2. (a) En $-\infty$: $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et

En $+\infty$: $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + n\,x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (pas de forme indéterminée)

(b) En $-\infty$: $\dfrac{1}{1+e^x} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $f_n(x) - (nx+1) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et la droite d'équation $y = nx + 1$ est asymptote.

En $+\infty$: $\dfrac{1}{1+e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f_n(x) - nx \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et la droite d'équation $y = nx$ est asymptote.

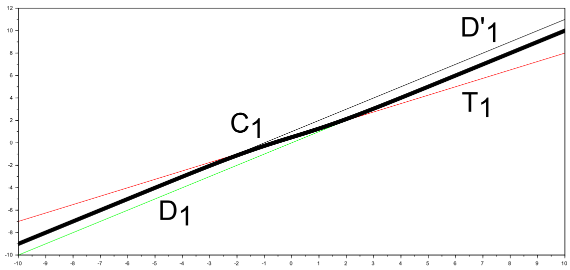
Conclusion : $\boxed{\text{les droites } (D_n) \text{ et } (D_n') \text{ sont asymptotes de } (C_n)}$

(c) f étant C^2, elle a un point d'inflexion en A_n si et seulement si f'' s'annule et change de signe.

Conclusion : $\boxed{\text{le seul point d'inflexion } A_n \text{ est } \left(0, \tfrac{1}{2}\right).}$

(d) En 0, la dérivée de f vaut $f'(0) = \frac{3}{4}$.

Conclusion : $\boxed{(T_1) : y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$



3. (a) f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
f_n est donc bijective de $\mathbb{R}$ dans $]\lim_{-\infty} f_n\ ,\ \lim_{+\infty} f_n[= \mathbb{R}$.
De plus $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$.

(b) On compare les images : $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 = \dfrac{-e^{-1/n}}{1+e^{-1/n}} < 0$, $f_n(u_n) = 0$ et $f_n(0) = \dfrac{1}{2}$

Donc $f_n\left(\dfrac{-1}{n}\right) < f_n(u_n) < f_n(0)$ et f_n étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{-1}{n} < u_n < 0}$

(c) Et comme $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par encadrement

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

(d) On a $0 = f_n(u_n) = \frac{1}{1+e^{u_n}} + n\ u_n$, donc

$$u_n = -\frac{1}{n}\frac{1}{1+e^{u_n}}$$

$$\frac{u_n}{\frac{-1}{2n}} = \frac{2}{1+e^{u_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}.}$

Exercice 3. Etude de fonction et suite définie par réurrence [ESC 2000]

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) f est dérivable en x tel que $x^2+x+1 \neq 0$. Or ce polynôme du second degré a pour discriminant $\Delta = 1-4 < 0$. Donc elle est toujours strictement négative. Donc f est définie, continue, et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{\left(x^2+x+1\right) - (2x+1)\,x}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{ainsi } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ et } f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$$

x	-∞		-1		0		1		+∞
$1-x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	1	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1/3	$\searrow$	0

(b) En 0, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Conclusion : $\boxed{\text{La tangente a donc pour équation } y = x.}$

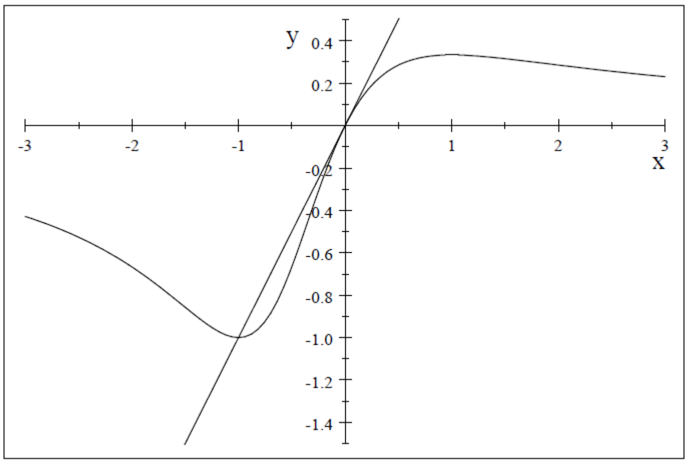
(c) Les positions relatives de C et T sont données par le signe de $f(x) - x$:

$$f(x) - x = \frac{x}{x^2+x+1} - x = \frac{x - x\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1} = \frac{-x^3-x^2}{x^2+x+1} = \frac{-x^2(x+1)}{x^2+x+1}$$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-x^2$		$-$		$-$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	
Position de C et T		C au dessus de T		C en dessous de T		C en dessous de T	

Conclusion : $\boxed{C \text{ et } T \text{ ont deux points d ?intersection de coordonnées } (-1,-1) \text{ et } (0,0).}$

(d) On trace C et T.



2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}, \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + 1} = \frac{p}{1+p+p^2}$$

Comme $1+p+p^2 \geq p+p^2 = p(1+p) > 0$, on a

$$\frac{1}{1+p+p^2} \leq \frac{1}{p(p+1)}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Ainsi pour } p>0,\ f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p}{1+p+p^2} \leq \frac{1}{p+1}}$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$".

Initialisation : $0 < u_0 = 1 \leq \dfrac{1}{0+1}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par hypothèse de récurrence $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, comme f est strictement croissante sur $[0,1]$ et que 0, u_n et $\frac{1}{n+1}$ en sont éléments,

$$f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

De plus, $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leq \dfrac{1}{n+2}$ car $n+1 \geq 1$ on a bien $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{n+2}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, on a : pour tout entier } n,\ 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}.}$

(c) Comme $\dfrac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par encadrement

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3. (a) D'après les variations de f, pour $x \neq 0$, $f(x) \neq 0$. Et

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{x^2+x+1}{x} = x + 1 + \frac{1}{x}$$

Donc comme pour tout entier n, $u_n \neq 0$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{f(u_n)} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}}$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : " $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$".

Initialisation : $\dfrac{1}{u_1} = u_0 + 1 + \dfrac{1}{u_0} = 1 + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \dfrac{1}{k}$. Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$$

or d'après 2.b) $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ et par hypothèse de récurrence $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$, donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} + 1 + n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n + 2 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, on a : pour tout entier } n \geq 1,\ \dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}.}$

4. (a) On calcule la différence pour tout réel $x \geq 2$

$$g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x) + \ln(x-1)$$

g est dérivable sur $[2, +\infty[$ et

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{-x + 1 - x(x-1) + x^2}{x^2(x+1)} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$$

donc g est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ et comme

$$g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x) + \ln(x-1) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{x} + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } x \geq 2,\ g(x) = \dfrac{1}{x} - \ln(x) + \ln(x-1) < 0.}$

(b) On fait alors la somme de ces inégalités pour k de 2 à n :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} &\leq \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k) \\ &\leq \ln(n) - \ln(1) = \ln(n) \end{aligned}$$

On reporte dans l'inégalité sur $1/u_n$

$$\frac{1}{u_n} \leq n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = n + 1 + \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq n + 2 + \ln(n)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour } n \geq 2,\ \dfrac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n).}$

(c) On a donc pour $n \geq 2$

$$u_n \geq \frac{1}{n + 2 + \ln(n)} \qquad \text{ainsi} \qquad n\, u_n \geq \frac{n}{n + 2 + \ln(n)}$$

d'où l'encadrement :

$$\frac{n}{n + 2 + \ln(n)} \leq n\, u_n \leq \frac{n}{n+1} \qquad \text{car d'après 2.}b) \quad 0 < u_n < \frac{1}{n+1}$$

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{\ln(n)}{n}} \leq n\, u_n \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

Or $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{2}{n} + \frac{\ln(n)}{n} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, par encadrement,

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n\, u_n = 1.}$

5. On peut proposer le programme suivant

```
n=input('entrez la valeur de n :');
u=1;
for k=1:n
    u=u/(u^2+u+1);
end
disp(u,'la valeur de un est')
```

1.2 Suites et séries

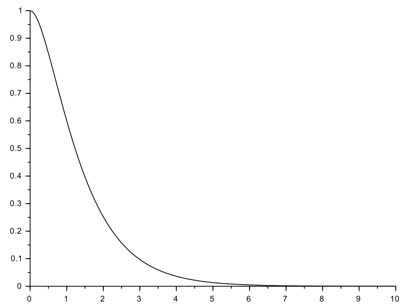
Exercice 4. Suites et inégalité des accroissements finis

Le but de l'exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution positive de l'équation :

$$2e^{-x} - e^{-2x} = x$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 2e^{-x} - e^{-2x}$. On donne $f(1/2) \approx 0,84$ et $f(1) \approx 0,60$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et
$$f'(x) = -2e^{-x} + 2e^{-2x} = 2e^{-2x}(1 - e^{x})$$
Comme $x \mapsto e^x$ est strictement croissante, $1 - e^{-x} < 0$ si $x > 0$. Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$. f tend vers 0 en $+\infty$, donc on a une asymptote horizontale. En 0 la pente de la tangente est $f'(0) = 0$ donc horizontale.



2. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$. $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $g(0) = 1$

   (b) $f(x) = x$ a une unique solution positive si et seulement, si $g(x) = 0$ a une unique solution positive
   g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et continue donc bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $]-\infty, 1]$ qui contient 0. D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α sur $\mathbb{R}_+$. De plus,
   $$g(1) \approx -0,4 < g(\alpha) = 0 < g(1/2) \approx 0,34$$
   Par stricte décroissance de g sur $\mathbb{R}^+$, on a $1/2 < \alpha < 1$.
   Ainsi $f(x) = x$ a donc une unique solution positive notée α et $1/2 \leq \alpha \leq 1$.

3. On étudie les variations de $h(x) = x - x^2$. h est dérivable sur $[0, 1]$ et $h'(x) = 1 - 2x$.
h est croissante sur $[0, 1/2]$ et décroissante sur $[1/2, 1]$. Comme $h(0) = 0$, $h(1/2) = 1/4$ et $h(1) = 0$ alors
$$\forall x \in [0, 1],\ 0 \leq x - x^2 \leq \frac{1}{4}.$$
Pour $x \in [1/2, 1]$, on a $0 < e^{-x} < e^{-1/2} < 1$, donc $e^{-x} \in [0, 1]$
$$|f'(x)| = 2\left(\left(e^{-x}\right) - \left(e^{-x}\right)^2\right) \leq \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
Finalement pour tout x de $[1/2, 1]$, on a
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

4. Soit u la suite définie par : $u_0 = 1/2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (a) Pour appliquer l'inégalité des accroissements finis, on démontre d'abord que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1/2, 1]$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "$u_n \in [1/2, 1]$."
   Initialisation : $u_0 = 1/2 \in [1/2, 1]$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $1/2 \leq u_n \leq 1$. f est strictement décroissante sur $[1/2, 1]$ donc

$$1 \geq f(1/2) \geq f(u_n) \geq f(1) \geq 1/2$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1/2, 1]$.
Pour $x \in [1/2, 1]$, $|f'(x)| \leq 1/2$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1/2, 1]$ et $\alpha \in [1/2, 1]$.
f est dérivable sur $[1/2, 1]$, on applique l'inégalité des accroissements finis sur $[1/2, 1]$ entre u_n et α, alors

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

Ainsi

$$|u_{n+1} - \alpha| = \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$."
Initialisation : $u_0 = 1/2 \in [1/2, 1]$ et $\alpha \in [1/2, 1]$ donc

$$|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence,

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

D'après la question précédente, on a $|u_{n+1} - \alpha| = \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$, ainsi

$$|u_{n+1} - \alpha| = \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

(c) D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\alpha - \frac{1}{2^{n+1}} \leq u_n \leq \alpha + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Comme $\frac{1}{2^{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, par encadrement on conclut que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

5. Comme l'écart entre u_n et α est inférieur à $\frac{1}{2^{n+1}}$, il suffit de calculer u_n jusqu'à ce que $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}$.

```
n=0;
u(1)=1/2;
p=1/2;
while p>10^(-3)
n=n+1;
p=1/(2^(n+1));
u(n+1)=2*exp(-u(n))-exp(-2*u(n));
end
disp(u(n))

 ans  =

    0.7301787
```

Exercice 5. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 [Ecricome 1999]

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

La suite (x_n) est récurrente linéaire du second orde à coefficients constants.

Son équation caractéristique $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} = 0$ a pour discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$ et pour solutions $r_1 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}$.

Il existe donc deux réels A et B tels que pour tout $n \in \mathbb{N} : x_n = A\left(r_1\right)^n + B\left(r_2\right)^n$.

Et ces deux racines appartenant à $]-1,1[$ on a alors $\left(r_1\right)^n \to 0$ et $\left(r_2\right)^n \to 0$.

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0}$

a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.

On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \;\; u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

N.B. Le terme suivant étant définit en fonction des deux précédents, l'hypothèse de récurrence devra porter sur deux termes successifs.

1.a) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "u_n et u_{n+1} sont définis, $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$".
Initialisation : u_0 et u_1 définis $u_0 = a \geq 1$ et $u_1 = b \geq 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$ alors $u_{n+1} \geq 0$ et $u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$ est bien défini (car $u_n \geq 0$ et $u_{n+1} \geq 0$) et $u_{n+2} \geq 2 \geq 1$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, on a : pour tout } n \in \mathbb{N} : u_n \text{ est définie et } u \geq 1.}$

1.b) Si u a une limite finie ℓ alors $\ell \geq 1$ et u_{n+1} et u_{n+2} également.
La fonction $\sqrt{\ }$ étant continue sur $\mathbb{R}^+$ et ℓ en étant élément, $\ell = \sqrt{\ell} + \sqrt{\ell}$
donc $\ell^2 = 4\ell$ d'où $\ell = 4$ ou $\ell = 0$ et comme $\ell \geq 1$
Conclusion : $\boxed{\text{la seule limite possible de la suite } (u_n) \text{ est } 4.}$

1.c) On a besoin des deux termes précédents pour calculer le suivant. À chaque étape, u est la valeur de u_n et v la valeur de u_{n+1}.

```
a=input('valeur de a ?');
b=input('valeur de b ?');
n=input('valeur de n ?');
u=a; v=b;
for k=1 :n
  w=v; //sauvegarde de la valeur de v
  v=sqrt(u)+sqrt(v);
  u=w;
end
disp(u)
```

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

2.a) On a $u_n = 4\,(v_n+1)^2$ alors si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

2.b) On simplifie l'égalité par équivalence : $(2 + v_n \neq 0\ )$

$$\begin{aligned}
v_{n+2} = \frac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})} &\iff 2(2+v_{n+2})v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \\
&\iff 2\left(2+\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}}-1\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}}-1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} - 1 + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \\
&\iff 2\left(\frac{1}{4}u_{n+2} - 1\right) = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}} + \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 2 \\
&\iff u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}
\end{aligned}$$

cette égalité étant vraie, la premièer également.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier naturel } n : v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}.}$

Comme $u_{n+2} \geq 1$ alors $v_{n+2} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 \geq -\frac{1}{2}$ et $2\,(2+v_{n+2}) \geq 3$ donc

$$v_{n+2} \leq \frac{1}{3}\,(v_{n+1}+v_n)$$

Et comme (inégaité triangulaire) $|a+b| \leq |a|+|b|$ pour tout a et b réel :

Conclusion : $\boxed{|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}\,(|v_{n+1}|+|v_n|)\,.}$

2.c) On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$0 \leq |v_n| \leq x_n$ et $0 \leq |v_{n+1}| \leq x_{n+1}$".
Initialisation : Pour $n=0$, on a $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Par hypothèse de récurrence, $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$ alors

$$\begin{array}{rcl} |v_{n+2}| & \leq & \frac{1}{3}\,(|v_{n+1}|+|v_n|) \\ & \leq & \frac{1}{3}\,(x_n + x_{n+1}) = x_{n+2} \end{array}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{D'après le principe de récurrence, on a : pour tout entier } n,\ 0 \leq |v_n| \leq x_n.}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ d'après la première question, alors par encadrement :

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0}$

Exercice 6. Suites implicites et intégrales [EM Lyon 2002]

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n\ :\ [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0,+\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}$$

I. Étude des fonctions polynomiales $\mathbf{P_n}$

1. Pour $k \geq 1$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$ donc

$$\begin{array}{rcl} P_n'(x) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \quad \text{réindexé } h = k-1 \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^{h+1} x^h = -\sum_{k=0}^{2n-1} (-x)^{\,h} \\ & = & -\dfrac{(-x)^{2n}-1}{-x-1} = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1} \quad \text{car } -x \neq 1 \end{array}$$

2. P_n' est du signe de $x^{2n}-1$ et comme $2n > 0$ la fonction $x \to x^{2n}-1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ puisque $2n$ est pair) donc

x	0		1		$+\infty$
$x^{2n}-1$		$-$	0	$+$	
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
$P_n(x)$	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

en $+\infty$ on a :

$$P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n} = x^{2n}\left(-\frac{1}{x^{2n-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^{2n-2}} + \ldots + \frac{-1}{2n-1}\frac{1}{x} + \frac{1}{2n}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$$

3. Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right) \end{aligned}$$

(b) On a donc en particulier pour $x = 2$:

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} \right)$$

Et comme $-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0$, $P_{n+1}(2) \geq P_n(2)$ la suite $(P_n(2))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alors croissante.

Comme de plus $P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors pour tout entier $n \geq 1$: $P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$

5. P_n est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc bijective de $[1, +\infty[$ dans $[P_n(1), +\infty]$
On utilise alors le théorème de bijection : $P_n(1) < 0 \leq P_n(2)$ donc $0 \in [P_n(1), P_n(2)]$.
Donc l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution sur $[1, +\infty[$ et $x_n \in]1, 2]$.

II. Limite de la suite $(\mathbf{x_n})_{\mathbf{n} \in \mathbb{N}^*}$

1. On a vu précédemment que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$: $P_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$. P_n est donc la primitive qui s'annule en 0 de $t \mapsto \dfrac{t^{2n}-1}{t+1}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt &= [P_n(t)]_0^x = P_n(x) - P_n(0) \\ &= P_n(x) \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $P_n(x_n) = 0$ donc $\displaystyle\int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1} = 0$. Par la relation de Chasles

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = 0$$

d'où

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = -\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\, dt$$

3. On étudie les variations de la différence : Soit $f_n(x) = t^{2n} - 1 - n(t^2-1)$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(t) = 2nt^{2n-1} - 2nt = 2nt\left(t^{2n-2} - 1\right)$.
et pour $n \geq 1$ on aura $2n - 2 \geq 0$ donc si $t \geq 1$ alors $t^{2n-2} \geq 1$ d'où $f_n'(t) \geq 0$
Donc pour $n \geq 1$, f_n est croissante sur $[1, +\infty[$.
De plus $f_n(1) = 0$, donc pour tout $t \in [1, +\infty[$: $f_n(t) \geq 0$ et

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1)$$

4. On a alors tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour $t \geq 1$

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}$$

comme $1 \leq x_n$ (bornes de l'intégrale croisssantes)

$$\begin{aligned} \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\, dt &\geq \int_1^{x_n} \frac{n\left(t^2-1\right)}{t+1}\, dt = \int_1^{x_n} n(t-1)\, dt = n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n} \\ &\geq \frac{n(x_n-1)^2}{2} \end{aligned}$$

que l'on réintroduit dans l'équation de la question II.2. pour obtenir :

$$\frac{n(x_n-1)^2}{2} \leq \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\, dt$$

intégrale que l'on majore à nouveau par $1-t^{2n} \leq 1$ d'où (bornes croissantes)

$$\int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\ dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t+1}\ dt = [\ln(t+1)]_0^1 = \ln(2)$$

d'où finalement :

$$\begin{array}{lll} 0 & \leq & \dfrac{n\,(x_n-1)^2}{2} \leq \ln(2) \\ 0 & < & (x_n-1)^2 \leqslant \dfrac{2\ln 2}{n} \\ 0 & < & x_n - 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{2\ln 2}}{\sqrt{n}} \quad \text{car } x_n-1 \geq 0 \text{ et } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*. \end{array}$$

5. Et par encadrement $x_n - 1 \to 0$ et donc $x_n \to 1$ quand $n \to +\infty$

Exercice 7. Calcul de sommes partielles

On considère la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

1. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit la Ne somme partielle S_N par

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)}$$

2. Pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{lll} S_N & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n+1-n}{n(n+1)} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} \\ & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \sum_{j=2}^{N+1} \frac{1}{j} \text{ avec le changement d'indice } j = n+1 \text{ dans la 2e somme} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{N+1} \text{ car on a une somme télescopique} \end{array}$$

3. Or comme $\dfrac{1}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on a

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

La série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et vaut 1.

Exercice 8. Convergence de séries

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes

1. On reconnait une série géométrique dérivée, qui converge car $\left|\dfrac{1}{5}\right| < 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} = \frac{1}{5^2} \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{5}{32}$$

2. On fait apparaître deux séries géométriques dérivées, qui convergent car $\left|-\dfrac{1}{3}\right| < 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(-1)^n}{3^n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(n-1+1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n\,(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{3}\right)^n \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \frac{2}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\left(1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right)^2} \\
&= \frac{3}{32} - \frac{3}{16} = -\frac{3}{32}
\end{aligned}$$

3. On reconnait une série exponentielle, la série converge donc.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\,(-1)^{n+1}}{n!} = -4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = -4\,e^{-1} = -\frac{4}{e}$$

4. On fait apparaître une série exponentielle, qui converge donc.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!}$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on considère

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{2^n}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2^{j+1}}{j!} = 2\sum_{j=0}^{N-1}\frac{2^j}{j!} \text{ avec le changement d'indice } j = n-1$$

Ainsi lorsque $N \to +\infty$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,2^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} = 2\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^j}{j!} = 2\,e^2$$

1.3 Intégration

Exercice 9. Intégration [Edhec 2014]

1. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour x réel fixé, l'intégrale sur l'intervalle $[x, 2x]$ de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est bien définie.

   $\boxed{\text{L'intégrale } \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \text{ est donc définie pour tout réel } x.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on effectue le changement de variables linéaire $u = -t$. On a alors

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}(-du) = -\int_{-x}^{2\,(-x)} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du = -f(-x).$$

   $\boxed{f \text{ est donc une fonction impaire.}}$

3. (a) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Une de ses primitives $G(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est donc définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_0^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt - \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = G(2x) - G(x)$$

   $\boxed{f \text{ est donc de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2\,G'(2x) - G'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

   Comme $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$ pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$.

   $\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

4. (a) On a pour $t > 0$,

$$\begin{array}{rcll} t^2 & \leqslant t^2+1 \leqslant & t^2+2t+1, & \\ \sqrt{t^2} & \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant & \sqrt{t^2+2t+1} & \text{car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*, \\ t & \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant & \sqrt{(t+1)^2} = t+1, & \\ \dfrac{1}{t+1} & \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant & \dfrac{1}{t} & \text{car } t \mapsto \dfrac{1}{t} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*. \end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, on intègre la précédente inégalité sur $[x, 2x]$.

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

$$\begin{array}{rcl} [\ln(t+1)]_{t=x}^{t=2x} & \leqslant f(x) \leqslant & [\ln(t)]_{t=x}^{t=2x} \\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) & \leqslant f(x) \leqslant & \ln(2x) - \ln(x). \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2).}$$

(b) D'après la question **4.(a)**,

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2).$$

Or $\ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) \to \ln(2)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Le théorème des gendarmes nous permet de conclure que $\boxed{f(x) \text{ tend vers } \ln(2) \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.}$

(c) La fonction f étant impaire, on en déduit que $f(x)$ tend vers $-\ln(2)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\ln(2)$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$\ln(2)$

(d) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\ln(2), \ln(2)[$, d'après le théorème de la bijection il existe donc une unique solution à l'équation $f(x) = 0 \in]-\ln(2), \ln(2)[$. De plus, $f(0) = 0$.

$\boxed{0 \text{ est donc l'unique solution de l'équation } f(x) = 0.}$

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcll} x^2 & < & x^2+1 & \\ |x| = \sqrt{x^2} & < & \sqrt{x^2+1} & \text{car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+, \\ -x \leq |x| & < & \sqrt{x^2+1} & \text{car pour } x \in \mathbb{R}, \quad -x \leq |x|. \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < x + \sqrt{x^2+1}}$$

(b) Puisque $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.
Pour $x \in \mathbb{R}$, calculons $h'(x)$.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}\,(x + \sqrt{x^2+1})} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

(c) h est l'unique primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ qui s'annule en 0. On a pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$.
f peut donc s'écrire pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = h(2x) - h(x) = \ln(2x + \sqrt{(2x)^2+1}) - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \ln\left(2\frac{x + \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)}$$

6. (a) Pour $x > 0$, on utilise le fait que $x = \int_x^{2x} 1 dt$. Calculons alors $x - f(x)$

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{(\sqrt{t^2+1}-1)(\sqrt{t^2+1}+1)}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} dt \\ &= \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}^2 - 1}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} dt. \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x > 0, \quad x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} dt.}$$

(b) Pour $t \geq 0$, $\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} \geq 0$, donc pour $x \geq 0$

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} dt \geq 0.$$

De plus, pour $t \geq 0$, $\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1) \geq 2$, ainsi pour $x \geq 0$

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}(\sqrt{t^2+1}+1)} dt \\ &\leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{2} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=x}^{t=2x} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{(2x)^3}{6} - \frac{x^3}{6} = \frac{7}{6}x^3.}$$

(c) Pour $x > 0$, la question **6.(b)** nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \quad x - f(x) &\leqslant \frac{7}{6}x^3 \\ 0 \leqslant \quad 1 - \frac{f(x)}{x} &\leqslant \frac{7}{6}x^2, \quad \text{on a divisé par } x > 0. \end{aligned}$$

Or $\frac{7}{6}x^2$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+. D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\frac{f(x)}{x} \text{ tend vers 1 lorsque } x \text{ tend vers } 0^+.}$

(d) Pour $x < 0$, puisque $-x > 0$, on a grâce à la question **6.(b)**

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \quad (-x) - f(-x) &\leqslant \frac{7}{6}(-x)^3 \\ 0 \leqslant \quad 1 - \frac{f(-x)}{-x} &\leqslant \frac{7}{6}(-x)^2, \quad \text{on a divisé par } -x > 0 \\ 0 \leqslant \quad 1 - \frac{f(x)}{x} &\leqslant \frac{7}{6}x^2, \quad \text{d'après la question } \mathbf{2.}, \text{ car } f \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

D'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\frac{f(x)}{x} \text{ tend donc vers 1 lorsque } x \text{ tend vers } 0^-.}$

1.4 Fonction de deux variables

Exercice 10. Etude classique [Edhec 1998]

On considére la fonction de deux variables réelles f définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = x\left(\ln(x) + x + y^2\right).$$

1. (a) Écrire des commandes permettant de tracer la nappe représentant la fonction f sur $[0.01, 2] \times [-2, 2]$ en utilisant la fonction `fplot3d`.

```
function[z]=f(x,y), z=x*(log(x)+x+y^2), endfunction;
x=linspace(0.01,2,101);y=linspace(-2,2,101);fplot3d(x,y,f)
```

   (b) Écrire des commandes permettant de visualiser les lignes de niveau -0.25, 0, 1, 2, 3 de f.

```
function[z]=f(x,y), z=x*(log(x)+x+y^2), endfunction;
x=linspace(0.01,2,101);y=linspace(-2,2,101);
contour(x,y,f,[-0.25 0 1 2 3])
```

   (c) Calculer le vecteur $\nabla(f)(1,0)$. À l'aide de la fonction `xarrows`, écrire une commande permettant de tracer le vecteur d'origine $(1,0)$ et égal à $\dfrac{1}{6}\nabla(f)(1,0)$, ainsi que les lignes de niveau de la question précédente.

   On calcule facilement le gradient de f en $(1,0)$.

$$\nabla(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   On a alors

```
function[z]=f(x,y), z=x*(log(x)+x+y^2), endfunction;
x=linspace(0.01,2,101);y=linspace(-2,2,101);
contour(x,y,f,[-0.25 0 1 2 3]);
xarrows([1;3/2],[0;0]);
```

2. On considére la fonction g définie pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^\times$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$

   (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
   De plus, $g\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \frac{2}{e} + 1 = \frac{2}{e} > 0$.

   (b) g est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
   Et comme $0 \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.
   De plus $g\left(\frac{1}{e}\right) > g(\alpha) = 0$ donc $\frac{1}{e} > \alpha$ car g est strictement croissante.

   Conclusion : $\boxed{\text{Il existe un unique réel } \alpha \in]0, \frac{1}{e}[\text{ tel que } g(\alpha) = 0.}$

3. On considére la fonction de deux variables réelles f définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{R} \qquad f(x,y) = x(\ln x + x + y^2)$$

   (a) f est un produit de fonction de classe C^2, f est donc de classe C^2 sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \ln(x) + x + y^2 + x\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \ln x + 2x + y^2 + 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2xy \end{aligned}$$

   Donc sur l'ouvert $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$, si f a un extremum local en (x,y) alors
   $\begin{cases} \ln x + 2x + y^2 + 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$ et comme $x \neq 0$: $\begin{cases} \ln x + 2x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $x = \alpha$ et $y = 0$.

   Conclusion : $\boxed{\text{Le seul point critique est } (\alpha, 0).}$

   (b) On calcule les dérivées partielles d'ordre 2 en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Comme f est de classe C^2, d'après le théorème de Schwarz on a

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \frac{1}{x} + 2, \quad \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 2y, \quad \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = (x,y) = 2x.$$

   On écrit la matrice hessienne en $(\alpha, 0)$:

$$\nabla^2(f)(\alpha,0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} + 2 & 0 \\ 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

   $\nabla^2(f)(\alpha,0)$ a donc deux valeurs propres strictement positives $\frac{1}{\alpha} + 2$ et 2α.

   Conclusion : $\boxed{f \text{ a un minimum local en } (\alpha, 0).}$

(c) On a $f(\alpha, 0) = \alpha(\ln \alpha + \alpha)$ et comme $0 = g(\alpha) = \ln(\alpha) + 2\alpha + 1$ alors $\ln(\alpha) + \alpha = -\alpha - 1$.
Conclusion : $\boxed{f(\alpha, 0) = -\alpha(\alpha + 1)}$

2 Algèbre

2.1 Calcul matriciel et résolution de systèmes linéaires

Exercice 11. Résolution de systèmes linéaires

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha x + z & = 1 \\ x + \alpha y + z & = 1 \\ x + y + \alpha z & = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + y + \alpha z & = 1, \quad L_1 \leftrightarrow L_3 \\ x + \alpha y + z & = 1 \\ \alpha x + z & = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x + y + \alpha z & = 1 \\ (\alpha - 1)y + (1 - \alpha)z & = 0, \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \alpha x + z & = 1 \end{array}\right.$$

Puisque si $\alpha \neq 1$, on a $y = z$, on peut donc distinguer deux cas

- **Cas** $\alpha \neq 1$

$$\left\{\begin{array}{c} x + (1 + \alpha)y = 1 \\ y = z \\ \alpha x + y = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x + (1 + \alpha)y = 1 \\ y = z \\ (1 - \alpha - \alpha^2)y = 1 - \alpha, \; L_3 \leftarrow L_3 - \alpha L_1 \end{array}\right.$$

  Or $1 - \alpha - \alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, on a

  - **Cas** $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, le système $(\mathcal{S})$ n'y a pas de solution.
  - **Cas** $\alpha \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ **et** $\alpha \neq 1$, le système $(\mathcal{S})$ a une unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \alpha - \alpha^2} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 1 - \alpha \\ 1 - \alpha \end{pmatrix}$$

- **Cas** $\alpha = 1$

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ z = 1 - x \end{array}\right.$$

  L'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ pour $\alpha = 1$ sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 1 - x \end{pmatrix} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

  Attention, l'ensemble des solutions pour $\alpha = 1$ n'est pas un espace vectoriel (le vecteur nul n'appartient pas à l'ensemble des solutions).

Exercice 12. Inversion de matrice

Pour calculer l'inverse de la matrice carrée A (supposée inversible), on résout le système suivant : Soient X et $Y \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$AX = Y \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ll} x_1 - x_3 & = y_1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = y_2 \\ -x_1 + 2x_3 & = y_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 - x_3 & = y_1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 & = y_2 \\ x_3 & = y_1 + y_3, \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1 & = 2y_1 + y_3 \\ x_2 & = -y_1 + y_2 + y_3 \\ x_3 & = y_1 + y_3 \end{array}\right.$$

On obtient donc la matrice inverse A^{-1} suivante

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 13. Suite matricielle récurrente linéaire d'ordre 2 [EM Lyon 2003]

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   et $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   enfin $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3$
2. Soient x et y réels tels que

$$xA + yA^2 = 0_2 \Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & x+y & x+y \\ x+y & y & y \\ x+y & y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

   Donc la famille $\left(A, A^2\right)$ est libre.
3. Comme la famille $\left(A, A^2\right)$ est libre, si a_n et b_n existent, ils sont alors uniques. L'existence se prouve par récurrence :
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n A^2$"
   Initialisation : Pour $n = 1$ on a $A^1 = 1A + 0A^2$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent. $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.
   Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Il existe a_n et b_n réels avec $A^n = a_n A + b_n A^2$, alors

$$A^{n+1} = A^n A = \left(a_n A + b_n A^2\right) A = a_n A^2 + b_n A^3 = a_n A^2 + b_n \left(A^2 + 2A\right) = 2b_n A + (a_n + b_n) A^2$$

   Donc $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ conviennent.
   $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n A + b_n A^2$.
4. On peut écrire

```
n=input('donner la valeur de n');
a=1;
b=0;
for k=1:n
a(k+1)=2*b(k);
b(k+1)=a(k)+b(k);
end;
disp(a(n)); disp(b(n));
```

5. (a) Comme $a_{n+1} = 2b_n$ pour tout $n \geq 1$, on a aussi $a_{n+2} = 2b_{n+1}$ pour tout entier n.
   Comme $b_{n+1} = a_n + b_n$ pour tout $n \geq 1$ on a $a_{n+2} = 2a_n + 2b_n$.
   et comme $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1}$ pour $n \geq 1$ on a finalement

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

   (b) La suite a est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Son équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0$ qui a pour racines $r = -1$ et $r = 2$
   Donc pour tout $n \geq 1$ on a a_n de la forme (avec x et y réels à déterminer)

$$a_n = x\,(-1)^n + y\,2^n.$$

   Comme $A = 1A + 0A^2$ et que $A^2 = 0A + 1A^2$ on a $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$ donc x et y sont solutions de

$$\begin{cases} a_1 = x\,(-1)^1 + y2^1 \\ a_2 = x\,(-1)^2 + y2^2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = -x + 2y \\ 0 = x + 4y \quad L_2 + L_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 = -x + 2y \\ 1 = 6y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -2/3 \\ y = 1/6 \end{cases}$$

   Donc pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n = -\frac{2}{3}\,(-1)^n + \frac{1}{6}2^n$$

   et pour tout $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{3}\,(-1)^n + \frac{1}{6}2^n$$

(c) Finalement on trouve pour tout entier n supérieur ou égal à 1

$$A^n = \left(-\frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right) A + \left(\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right) A^2$$

Exercice 14. Calcul matriciel et chaines de Markov [Ecricome 2001]

Partie 1

1. On a :

$$\begin{aligned} M(a).M(b) &= \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2b & b & b \\ b & 1-2b & b \\ b & b & 1-2b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-2b-2a+4ab+2b & a+b-3ab & a+b-3ab \\ a-2ab+b-2ba+ab & 1-2(a+b-3ab) & a+b-3ab \\ ab+a-2ab+b-2ba & a+b-3ab & 1-2(a+b-3ab) \end{pmatrix} = M(a+b-3ab) \end{aligned}$$

2. On cherche l'inverse de $M(a)$ sous la forme de $M(b)$. Comme $M(0) = I$, il suffit d'avoir $M(a)M(b) = M(0)$ donc

$$a+b-3ab = 0 \Leftrightarrow b(1-3a) = -a \Leftrightarrow b = -a/(1-3a) \quad \text{si } a \neq 1/3$$

Donc si $a \neq 1/3$ on a $b = -a/(1-3a)$ qui est solution. Donc avec cette valeur de b, $M(a) \cdot M(b) = M(0) = I$ et $M(b) \cdot M(a) = I$ donc $M(a)$ est inversible et son inverse est :

$$M(a)^{-1} = M\left(\frac{-a}{1-3a}\right).$$

On a

$$M(1/3)^2 = M(1/3)M(1/3) = M(1/3+1/3-1/3) = M(1/3).$$

Raisonnons par l'absurde. Si $M(1/3)$ est inversible alors on peut multiplier l'équation $M(1/3)^2 = M(1/3)$ par $M(1/3)^{-1}$ pour obtenir $M(1/3) = I$. Or $M(1/3) \neq I$

Conclusion : $\boxed{M(1/3) \text{ n'est pas inversible.}}$

3. $a_0 = 1/3$ est une solution de $[M(a_0)]^2 = M(a_0)$. Est-ce la seule ?

$$\begin{aligned} [M(x)]^2 = M(x) &\Leftrightarrow M(2x-3x^2) = M(x) \\ &\Leftrightarrow 2x-3x^2 = x \\ &\Leftrightarrow x-3x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-3x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1/3 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{La seule solution non nulle de } [M(a_0)]^2 = M(a_0) \text{ est donc } a_0 = 1/3.}$

4. On considère les matrices :

$$P = M(a_0) \quad \text{et} \quad Q = I - P$$

On a donc $P^2 = P$, $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) On rappelle que $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix}$ et on a

$$P + \alpha Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\alpha & 1-\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1+2\alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & 1-\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned} M(a) = P + \alpha Q &\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2\alpha = 3(1-2a) \\ 1-\alpha = 3a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 2-6a \\ \alpha = 1-3a \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1-3a. \end{aligned}$$

Donc seul $\alpha = 1-3a$ convient pour : $\quad M(a) = P + \alpha Q.$

Conclusion : $\boxed{\alpha = 1-3a.}$

(b) D'après la définition de P et la question I.3., $P^2 = P$.
$QP = (I-P)\,P = P - P^2 = P - P = 0$.
$PQ = P\,(I-P) = P - P^2 = 0$.
$Q^2 = (I-P)^2 = I - P - P + P^2 = I - 2P + P = I - P = Q$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n = x_nP + y_nQ$."
<u>Initialisation :</u> $[M(a)]^1 = M\,(a) = P + \alpha Q$, donc $x_1 = 1$ et $y_1 = \alpha$ conviennent. $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.
<u>Hérédité :</u> On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, il existe x_n et y_n réels tels que $[M(a)]^n = x_nP + y_nQ$ alors,

$$[M(a)]^{n+1} = (x_nP + y_nQ)\,(P + \alpha Q) = x_nP^2 + y_nQP + \alpha x_nPQ + \alpha y_nQ^2 = x_nP + \alpha y_nQ.$$

Donc avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$ qui sont bien des réels, on a $[M(a)]^{n+1} = x_{n+1}P + y_{n+1}Q$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } x_n \text{ et } y_n \text{ réels tels que } [M(a)]^n = x_nP + y_nQ.}$
Donc avec $x_{n+1} = x_n$ et $y_{n+1} = \alpha y_n$ qui sont bien des réels, on a $[M(a)]^{n+1} = x_{n+1}P + y_{n+1}Q$

(d) La suite (x_n) est constante donc égale à $x_1 = 1$ et la suite (y_n) est géométrique de raison α donc $y_n = \alpha^{n-1}y_1 = \alpha^n$.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour } n \in \mathbb{N}^*, \quad [M\,(a)]^n = P + \alpha^nQ.}$

(e) On a donc avec $\alpha = 1 - 3a$

$$M\,(a)^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\alpha^n}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n & 1-\alpha^n \\ 1-\alpha^n & 1-\alpha^n & 1+2\alpha^n \end{pmatrix}.$$

Partie 2
Dans la suite de l'exercice, on suppose que $a \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.

1. On définit des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par leur premier terme p_1, q_1, r_1, et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} p_{n+1} = (1-2a)p_n + aq_n + ar_n \\ q_{n+1} = ap_n + (1-2a)q_n + ar_n \\ r_{n+1} = ap_n + aq_n + (1-2a)r_n \end{cases}$$

(a) Comme $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = M\,(a)\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ on a alors pour tout entier n,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} = [M\,(a)]^{n-1}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \left[P + \alpha^{n-1}Q\right]\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix}.$$

(b) On a $\alpha = 1 - 3a$ et comme $0 < a < 2/3$ alors

$$-2 < -3a < 0$$

$$-1 < 1 - 3a < 1$$

donc $|\alpha| < 1$ donc $\alpha^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\to} P\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(p_1+q_1+r_1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion : $\boxed{\text{Les suites } (p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ont la même limite } \dfrac{p_1+q_1+r_1}{3}.}$

2. (a) (M_n, S_n, B_n) formant un système complet d'événements donc

$$\begin{aligned} p\,(M_{n+1}) &= p_{M_n}(M_{n+1})\,p\,(M_n) + p_{S_n}(M_{n+1})\,p\,(S_n) + p_{B_n}(M_{n+1})\,p\,(B_n) \\ &= \frac{2}{3}p\,(M_n) + \frac{1}{6}p\,(S_n) + \frac{1}{6}p\,(B_n) \end{aligned}$$

et de la même façon

$$p\,(S_{n+1}) = \frac{1}{6}p\,(M_n) + \frac{2}{3}p\,(S_n) + \frac{1}{6}p\,(B_n)$$
$$p\,(B_{n+1}) = \frac{1}{6}p\,(M_n) + \frac{1}{6}p\,(S_n) + \frac{2}{3}p\,(B_n).$$

(b) On retrouve les relations de récurrence précédentes avec $p_n = p(M_n)$, $q_n = p(S_n)$ et $r_n = p(B_n)$ et

$$a = \frac{1}{6} \in \left]0, \frac{2}{3}\right[\quad \text{et} \quad \alpha = 1 - \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p(M_n) \\ p(S_n) \\ p(B_n) \end{pmatrix} &= \left[M\left(\frac{1}{6}\right)\right]^{n-1} \begin{pmatrix} p(M_1) \\ p(S_1) \\ p(B_1) \end{pmatrix} \\
&= \left(P + \frac{1}{2^{n-1}}Q\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2^{n-1}} Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3 \cdot 2^{n-1}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ 1 + \frac{2}{2^{n-1}} \\ 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{p(M_n) = p(B_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \text{ et } p(S_n) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).}$

(c) Et quand n tend vers $+\infty$, ces trois probabilités tendent vers $\frac{1}{3}$.

Exercice 15. Equation matricielle [ESCP 1998]

1. (a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = (n+1)\, x^{n-1} \left(x + \frac{n}{n+1}\right)$$

Si n est pair, on a alors $n-1$ impair et le signe de f' est alors :

x		$-\frac{n}{n+1}$		0		
x^{n-1}	$-$		$-$	0	$+$	
$x + n/(n+1)$	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si n est impair, on a alors $n-1$ pair et le signe de f' est alors :

x		$-\frac{n}{n+1}$		0		
x^{n-1}	$+$		$+$	0	$+$	
$x + n/(n+1)$	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Si n est impair, on a d'après le sens de variation, $f\left(-\frac{n}{n+1}\right) < f(0) = 0 < 2$

Si n est pair, $\frac{n}{n+1} < 1$ donc $\left(-\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1^n$ et $\left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} < 0$ donc $f\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$

(c) f est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$,donc d'après le théorème de la bijection monotone, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution sur $[0, +\infty[$: $x = 1$ (car $f(1) = 2$).

- Si n est pair : d'après les variations de f et $f\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$, il n'y a pas de solution sur $]-\infty, 0]$ et elle a donc $x = 1$ pour unique solution sur $\mathbb{R}$.
- Si n est impair : f est continue et strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{n}{n+1}\right]$ dans $\left[f(-\frac{n}{n+1}), +\infty\right[$, donc . Comme $f(-\frac{n}{n+1}) < 2$, d'après le théorème de la bijection monotone, l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution sur $\left]-\infty, -\frac{n}{n+1}\right]$. De plus, d'après les variations de f, elle n'en a pas sur $\left]-\frac{n}{n+1}, 0\right]$. Elle a donc deux solutions : $\alpha < 0$ et 1.

2. (a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$.

$$A \cdot P = P \cdot D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+x & 1+y \\ 1+x & 1+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x=0 & 1+y=2 \\ 1+x=0 & 1+y=2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) On trouve P^{-1} en posant le système $PX = Y$. Ainsi P est invarsible et $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme $A \cdot P = P \cdot D$, en multipliant à droite par P^{-1} on obtient

$$A = A \cdot P \cdot .P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

et en multipliant à gauche par P^{-1}

$$D = P^{-1} \cdot P \cdot D = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

3. (a) Si $X^{n+1} + X^n = A$, alors

$$X^{n+1} + X^n = A \Leftrightarrow P^{-1} \cdot (X^{n+1} + X^n)P = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow P^{-1} \cdot X^{n+1} \cdot P + P^{-1} \cdot X^n \cdot P = D \Leftrightarrow (P^{-1}XP)^{n+1} + (P^{-1}XP)^n = D$$

Donc en posant $Y = P^{-1}XP$, Y est solution de (E'_n).

(b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

i. Si Y est solution de (E'_n) alors $Y^{n+1} + Y^n = D$ donc

$$D \cdot Y = (Y^{n+1} + Y^n) \cdot Y = Y^{n+2} + Y^{n+1} = Y \cdot (Y^{n+1} + Y^n) = Y \cdot D$$

ii. Comme $YD = DY$ alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$$

donc $c = 0$ et $b = 0$

iii. Donc $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est diagonale, on connait donc ses puissances : $Y^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$ et

$$Y^{n+1} + Y^n = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^{n+1} + a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1} + d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{n+1} + a^n = 0 \\ d^{n+1} + d^n = 2 \end{cases}$$

Or $a^{n+1} + a^n = a^n\,(a+1)$, donc la première équation a pour solutions $a = -1$ et $a = 0$.

iv. La seconde équation a pour unique solution $d = 1$ si n est pair et pour solutions $d = \alpha$ et $d = 1$ si n est impair.

On a donc

- Si n est pair, on a 2 solutions pour (E'_n) et donc 2 solutions pour (E_n) via le changement de variable $X = PYP^{-1}$
- Si n est impair, on a 4 solutions (4 valeurs possibles pour le couple (a, d)) pour (E'_n) et donc 4 solutions pour (E_n).

(c) L'équation $x^4 + x^3 = 2$ est l'équation (E_3). Comme 3 est impair, cette équation a donc 4 solutions :

$$X = PYP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & -a+d \\ -a+d & a+d \end{pmatrix}$$

Comme $a = -1$ ou 0 et $d = \alpha$ ou 1, l'ensemble des solutions de (E_3) est donc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & -1+\alpha \\ 1+\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

2.2 Espaces vectoriels

Exercice 16. Base d'un espace vectoriel

Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (2,-2,-1)$ et $u_3 = (1,1,-1)$. Soient

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y+z=0\} \text{ et } F = \mathrm{Vect}(u_1,u_2).$$

1. Pour montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on a directement

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y+z=0\} = \{(x,y,-y) \in \mathbb{R}^3, \text{ avec } (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\left((1,0,0),(0,1,-1)\right) \subset \mathbb{R}^3.$$

   E est donc bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. De plus, comme $(1,0,0)$ et $(0,1,-1)$ ne sont pas colinéaires, $((1,0,0),(0,1,-1))$ est une famille libre. Par conséquent une base de E est $((1,0,0),(0,1,-1))$. On a $\dim(E) = 2$.

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & =0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 & =0 \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 & =0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=0 \\ -2\lambda_3=0, L_3 \leftarrow L_3-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 & =0 \\ \lambda_2 & =0 \\ \lambda_3 & =0 \end{cases}$$

   La famille (u_1,u_2,u_3) est donc libre. u_3 ne peut donc pas s'écrire comme combinaison linéaire de u_1 et u_2, par conséquent $u_3 \notin F$.

3. On a $u_3 = (1,1,-1)$, on remarque donc que u_3 vérifie la condition du sous-espace vectoriel E (car $1+(-1)=0$). On en conclut que $u_3 \in E$.

4. Donner une base de $E \cap F$.
   Soit $X = (x,y,z) \in E \cap F$,
   — Comme $X \in E$, on peut écrire $X = (x,y,-y)$.
   — Comme $X \in F$, ils existent $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $X = au_1 + bu_2$.
   On obtient donc

$$(x,y,-y) = a(1,1,1)+b(2,-2,-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x & =a+2b \\ y & =a-2b \\ -y & =a-b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & =a+2b \\ y & =a-2b \\ 0 & =2a-3b, \quad L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & =-7y \\ b & =-2y \\ a & =-3y \end{cases}$$

   Ainsi l'ensemble des éléments de $E \cap F$ s'écrivent sous la forme $(-7y,y,-y)$.

$$E \cap F = \mathrm{Vect}\left((-7,1,-1)\right).$$

   $(-7,1,-1)$ étant un vecteur non nul, c'est donc une base de $E \cap F$. On a $\dim(E \cap F) = 1$.

5. Soit $u_4 = (-1,7,5)$, comme $7 \neq -5$, on en conclut que $u_4 \notin E$. Déterminons si $u_4 \in F$, cherchons si u_4 s'écrit comme combinaison linéaire de u_1 et u_2. Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$u_4 = \alpha u_1 + \beta u_2 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 & =\alpha+2\beta \\ 7 & =\alpha-2\beta \\ 5 & =\alpha-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 & =\alpha+2\beta \\ 6 & =2\alpha, L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ 5 & =\alpha-\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & =3 \\ \beta & =-2 \end{cases}$$

   On obtient donc $u_4 = 3u_1 - 2u_2$, ainsi $u_4 \in F$.

Exercice 17. Rang d'une famille

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on donne : $u_1 = (1,0,-1)$, $u_2 = (-1,2,1)$ et $u_3 = (3,-4,-3)$.

1. On détermine le rang de la matrice suivante formée des vecteurs u_1,u_2,u_3 afin de déterminer le rang de la famille (u_1,u_2,u_3).

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ qui est une matrice triangulaire, son rang est 2.}$$

   Donc la famille (u_1,u_2,u_3) est de rang 2.

2. Comme la famille (u_1,u_2,u_3) est de rang 2, on peut exprimer facilement un vecteur en fonction des deux autres.

$$u_3 = u_1 - 2u_2$$

   Ainsi $F = \mathrm{Vect}\,(u_1,u_2)$, or u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires, donc (u_1,u_2) est une famille libre. Ainsi (u_1,u_2) est une base de F et $\dim(F) = 2$.

2.3 Applications linéaires

Exercice 18. Endomorphisme de l'espace des matrices

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\varphi(M) = AM.$$

1. Vérifions que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\varphi(M) = AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Soient $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

   $$\varphi(\lambda M + \mu N) = A\left(\lambda M + \mu N\right) = \lambda AM + \mu AN = \lambda\varphi(M) + \mu\varphi(N).$$

   φ est donc linéaire. φ est bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminons $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\varphi)$

   $$AM = 0_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cl} a+2c & = 0 \\ b+2d & = 0 \\ 3a+4c & = 0 \\ 3b+4d & = 0 \end{array}\right.$$

   $$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cll} a+2c & = 0 & \\ b+2d & = 0 & \\ a & = 0, & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ b & = 0, & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = c = d = 0.$$

   Ainsi $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_2\}$.
   D'après le théorème du rang, on obtient

   $$\dim\left(\mathrm{Im}(\varphi)\right) = \dim\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(\varphi)\right) = \dim\left(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\right) = 4.$$

   Et comme $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. La base canonique $(E_{1,1}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est donc une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.

3. On calcule l'image de chaque élément de la base de départ par φ

   $$\varphi(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} + 3E_{2,1}$$

   $$\varphi(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} + 4E_{2,1}$$

   $$\varphi(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_{1,2} + 3E_{2,2}$$

   $$\varphi(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 2E_{1,2} + 4E_{2,2}$$

   Donc on peut écrire la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 19. Un autre endomorphisme de l'espace des matrices [EM Lyon 2008]

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1&1\\-3&-2&-1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

Partie 1 : Calcul matriciel

1. On cherche à déterminer l'inversibilité de la matrice P

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{=}\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est inversible, P est donc inversible.

2. On calcule P^{-1}. Soient $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ tels que $PX=Y$.

$$PX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=y_1\\-x_1+x_2+x_3=y_2\\x_2-x_3=y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2=y_1, L_1\text{ (pivot)}\\x_3=y_1+y_2, L_2\leftarrow L_2+L_1\\x_2-x_3=y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1+x_2=2y_1+y_2+y_3\\x_3=y_1+y_2,\\x_2=y_3+x_3=y_1+y_2+y_3\end{cases}$$

Ainsi $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$.

De plus,

$$PDP^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\-1&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\-2&-2&-1\end{pmatrix}=A$$

3.

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&1\\-3&-2&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&0\\-1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=C$$

C est bien diagonale.

Partie 2 : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f:E\to E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M)=AM-MB$.

1. On a $E=\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc $\dim(E)=3^2=9$
2. f est bien une application de E dans E.
   Pour M et N de E et λ et μ réels on a :

$$\begin{aligned}f(\lambda M+\mu N)&=A(\lambda M+\mu N)+(\lambda M+\mu N)B\\&=\lambda(AM-MB)+\mu(AN-NB)\\&=\lambda f(M)+\mu f(N)\end{aligned}$$

   donc f est linéaire et est un endomorphisme de E.
3. Soit $M\in E$, on note $N=P^{-1}M\,P$.
   (a) On remarque que $M=PNP^{-1}$. On a

$$M\in\operatorname{Ker}(f)\Longleftrightarrow f(M)=0\Longleftrightarrow AM=MB\Longleftrightarrow APNP^{-1}=PNP^{-1}B$$
$$\Longleftrightarrow P^{-1}APNP^{-1}P=P^{-1}PNP^{-1}BP\Longleftrightarrow DN=NC$$

   Donc $M\in\operatorname{Ker}(f)\Longleftrightarrow DN=NC$

(b) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. On a $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ et $NC = \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ d & 0 & -f \\ g & 0 & -i \end{pmatrix}$

Donc $DN = NC \iff \begin{cases} 0 = a & & 0 = -c \\ -d = d & -e = 0 & -f = -f \\ g = g & h = 0 & i = -i \end{cases} \iff \begin{cases} a = 0 & & c = 0 \\ d = 0 & e = 0 & \\ & h = 0 & i = 0 \end{cases}$

Les matrices N vérifiant $DN = NC$ sont donc celles qui s'écrivent : $N = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec b, f et $g \in \mathbb{R}$.

(c) Et avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

L'ensemble $F = \{N \text{ tel que } DN = NC\} = \text{Vect}\,(J, K, L)$ est donc un espace vectoriel.

Les trois matrices (J, K, L) qui l'engendrent sont libres (c'est une sous-famille de la base canonique de $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$).

Donc ces trois matrices forment une base de F et $\dim(F) = 3$.

4. (a) On a vu qu'avec $N = P^{-1}MP : M \in \text{Ker}\,(f) \iff DN = NC$

Donc $\text{Ker}\,(f) = \left\{PNP^{-1} \text{ avec } N \in F\right\} = \left\{P\,(xJ + yK + zL)\,P^{-1} \text{ avec } x, y, z \in \mathbb{R}\right\}$

et avec $J' = PJP^{-1}$, $K' = PKP^{-1}$ et $L' = PLP^{-1}$ on a $\text{Ker}\,(f) = \text{Vect}\,(J', L', K')$

La famille (J', L', K') est libre car si $\lambda_1 J' + \lambda_2 K' + \lambda_3 L' = 0_3$ alors $\lambda_1 J + \lambda_2 K + \lambda_3 L = 0_3$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Elle forme donc une base de $\text{Ker}\,(f)$. Donc $\dim(\text{Ker}\,(f)) = 3$.

(b) On a $PJP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}\,(f)$

et en prenant un élément qui n'appartient pas à $\text{Ker}(f)$, par exemple $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$AM - MB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \text{Im}\,(f)$$

Exercice 20. Changement de base [Edhec 2005]

On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et on rappelle que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, associe $f(M) = M + (a + d)\,I_2$ où I_2 désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. f est une application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque : *Comme $f(M)$ est définie à partir des coefficients de la matrice M, pour calculer $f(\alpha M + \beta N)$ il faut d'abord calculer les coefficients de la matrice $\alpha M + \beta N$.*

Pour toutes matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β de $\mathbb{R}$ on a :

$$\alpha M + \beta N = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= \alpha M + \beta N + (\alpha a + \beta a' + \alpha d + \beta d')\,I_2 \\ &= \alpha M + (\alpha a + \alpha d)\,I_2 + \beta N + (\beta a' + \beta d')\,I_2 \\ &= \alpha\,[M + (a + d)\,I_2] + \beta\,[N + (a' + d')\,I_2] \\ &= \alpha f(M) + \beta f(N) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

2. (a) On a facilement

$$f(J_1) = J_1 + 1I_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J_1 + J_4, \quad f(J_2) = J_2 + 0I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = J_2$$

$$f(J_3) = J_3 + 0I_2 = J_3, \quad f(J_4) = J_4 + 1I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = J_1 + 2J_4$$

(b) On a donc les coordonnées des images des vecteurs de la base $\mathcal{B} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$
Les coordonnées de $f(J_1)$ sont $(2,0,0,1)$, celles de $f(J_2)$ sont $(0,1,0,0)$, celles de $f(J_3)$ sont $(0,0,1,0)$ et enfin celles de $f(J_4)$ sont $(1,0,0,2)$.
Donc la matrice A de f dans la base $\mathcal{B} = (J_1, J_2, J_3, J_4)$ est

$$A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. (a) On montre que la famille $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est libre :
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\lambda_1 (J_1 - J_4) + \lambda_2 J_2 + \lambda_3 J_3 + \lambda_4 I_2 = 0_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Donc la famille $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est libre dans un espace vectoriel de dimension 4,
Conclusion : $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

(b) On calcule le images puis leurs coordonnées dans $\mathcal{C}$:

$$f(J_1 - J_4) = f(J_1) - f(J_4) = 2J_1 + J_4 - J_1 - 2J_4 = J_1 - J_4,$$

$$f(J_2) = J_2, \quad f(J_3) = J_3, \quad f(I_2) = I_2 + 2I_2 = 3I_2$$

Donc la matrice D de f dans la base $\mathcal{C} = (J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est

$$D = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$, c'est la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{B}$. Cette matrice P est donc inversible et comme $I_2 = J_1 + J_4$ on a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La formule de changement de base donne alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = P_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f) \cdot P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}^{-1}$$

Conclusion : $\boxed{A = P \cdot D \cdot P^{-1}}$

4. (a) Calculons P^{-1}. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tels que

$$PX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_4 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ -x_1 + x_4 = y_4 \end{cases} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x_1 + x_4 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ 2x_4 = y_4 + y_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_4 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \\ x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_4 \end{cases}$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "$A^n = P\,D^n P^{-1}$."
Initialisation : $P\,D^0 P^{-1} = I_2 = A^0$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
Hérédité On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Alors $A^n = P\,D^n P^{-1}$, alors

$$A^{n+1} = AA^n = P\,DP^{-1}P\,D^n P^{-1} = P\,D^{n+1}P^{-1}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,D^n P^{-1}.}$

(c) Comme la matrice D est diagonale, on a directement pour $n \in \mathbb{N}$

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} A^n &= P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3^n/2 & 0 & 0 & 3^n/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^n & 0 & 0 & -1+3^n \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1+3^n & 0 & 0 & 1+3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.4 Diagonalisation

Exercice 21. Endomorphisme de carré diagonalisable [Edhec 2012]

1. Si f, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres dans laquelle la matrice de f est diagonale

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = D$$

La matrice de $f \circ f$ dans la base $\mathcal{B}$ est elle aussi diagonale

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f \circ f) = D^2$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } f \text{ est diagonalisable alors } f^2 \text{ l'est aussi.}}$

On se propose de montrer que la réciproque est fausse.
Soit g endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

2. (a) On calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$A^4 = \left(A^2\right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{A^4 = I}$
Donc $X^4 - 1$ est un polynôme annulateur de A. Si λ est valeur propre de A alors λ est racine de ce polynôme annulateur. Ainsi $\lambda^4 = 1$, donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.
Conclusion : $\boxed{\text{Les seules valeurs propres possibles de } A \text{ sont } 1 \text{ et } -1.}$

(b) Soit $(x, y, z) \in \text{Ker}\,(g - Id)$

$$(A-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ 2x-6y+4z=0 & L_2+2L_1 \\ 3x-8y+5z=0 & L_3+3L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+2y-z=0 \\ -2y+2z=0 \\ -2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

On pose $u = (1, 1, 1)$, ainsi $\text{Ker}\,(g - Id) = \text{Vect}\,((1, 1, 1)) = \text{Vect}\,(u)$. De plus, la famille (u) est libre (vecteur non nul), donc c'est une base de $\text{Ker}\,(g - Id)$.

(c) Soit $(x, y, z) \in \text{Ker}\,(g + Id)$

$$(A+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x-4y+4z=0 & L_2-2L_1 \\ 3x-8y+7z=0 & L_3-3L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -8y+6z=0 \\ -14y+10z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=0 \\ y=3/4z \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Ker}\,(g+Id) = \{0\} \text{ et } -1 \text{ n'est donc pas valeur propre de } g.}$

(d) Comme $E_1(g) = \text{Ker}\,(g - Id)$, on a $\dim(E_1(g)) = 1$. La somme des dimensions des sous espaces propres est 1 et donc différente de $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Conclusion : $\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

3. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $A^2X = -X$.

$$\left(A^2+I\right)X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-2y+2z=0 \\ 2x-2y+2z \quad =0 \\ 2x-2y+2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y - z$$

On pose $v = (1, 1, 0)$ et $w = (-1, 0, 1)$, ainsi $\text{Ker}\left(g^2 + \text{Id}\right) = \text{Vect}\,((1, 1, 0), (-1, 0, 1)) = \text{Vect}\,(v, w)$. De plus, la famille (v, w) est libre (2 vecteurs non colinéaires), donc c'est une base de $\text{Ker}\left(g^2 + Id\right)$.

(b) On avait $u = (1, 1, 1)$. On montre que la famille (u, v, w) est libre :
Soient a, b, c réels tels que $au + bv + cw = 0$ alors

$$\begin{cases} a+b-z=0 \\ a+b=0 \\ a+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-a \\ c=-a \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } (u, v, w) \text{ est une famille libre de trois vecteurs de } \mathbb{R}^3\text{, donc c'est une base de } \mathbb{R}^3.}$

(c) On avait $g(u) = u$, donc $g^2(u) = g(u) = u$. u est un vecteur propre de g^2 associé à la valeur propre 1. De même, v et w sont des vecteurs propres de g^2 associés à la valeur propre -1.
La matrice de g dans la base de vecteurs propres (u, v, w) est donc

$$\text{Mat}_{(u,v,w)}(g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comme un contre exemple suffit pour prouver qu'une propriété n'est pas universelle,

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} g^2 \text{ est diagonalisable et pourtant, } g \text{ ne l'est pas.} \\ \text{La réciproque est donc bien fausse.} \end{array}}$

Exercice 22. Diagonalisation et calcul de puissances [Ecricome 2009]

A tout triplet (a,b,c) de réels, on associe la matrice $M(a,b,c)$ définie par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ où a, b, c sont des réels. Ainsi :

$$E = \{M(a,b,c) \text{ avec } a,b,c \text{ réels}\}$$

I. Recherche d'une base de E.

1. Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $E = \operatorname{Vect}(A,B,C)$.

   Conclusion : $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).}$

2. La famille (A,B,C) est génératrice de E et si $aA + bB + cC = 0$ alors $a = b = c = 0$, donc la famille est libre.

   Conclusion : $\boxed{(A,B,C) \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = 3.}$

II. Cas particulier de la matrice $M(1,2,3)$.

1. $M(1,2,3)$ est triangulaire.

   Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } M(1,2,3) \text{ sont 1, 2 et 3.}}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \iff y = z = 0$ donc $E_1(M(1,2,3)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ y = x \end{cases}$ donc $E_2(M(1,2,3)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ -y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3/2z \\ y = 2z \end{cases}$ donc $E_3(M(1,2,3)) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

   $M(1,2,3)$ matrice d'ordre 3 possède trois valeurs propres distinctes. $M(1,2,3)$ est donc diagonalisable et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de vecteurs propres.

   Conclusion : $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ on a } D = P^{-1}M(1,2,3)\,P}$

3. Calculons P^{-1}. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tels que

$$PX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 3/2x_3 = y_1 \\ x_2 + 2x_3 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 1/2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

   Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

   et

$$\begin{aligned}
[M(1,2,3)]^n &= PD^nP^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 2^n & -2^{n+1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{[M(1,2,3)]^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n-1 & \frac{1}{2}3^{n+1}-2^{n+1}+\frac{1}{2} \\ 0 & 2^n & 2\times 3^n - 2^{n+1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \text{ pour tout } n\in\mathbb{N}}$

III. Cas particulier de la matrice $M(1,1,1)$

On pose $J = M(1,1,1) - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. On a $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'où $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$.

   Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 3 : J^n = 0}$

2. Et comme $M(1,1,1) = I_3 + J$ et que $I_3 J = J = J I_3$ alors d'après la formule du binôme de Newton, pour $n \geq 2$

$$\begin{aligned} [M(1,1,1)]^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k I_3^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} J + \binom{n}{2} J^2. \end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 2 : [M(1,1,1)]^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2}$

   Pour $n = 1 : I_3 + 1J = M(1,1,1)$ et pour $n = 0 : I_3 = M(1,1,1)^0$.

   Conclusion : $\boxed{\text{l'écriture est encore valable pour } n = 0 \text{ et } n = 1}$

3. *Conclusion :* $\boxed{[M(1,1,1)]^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

IV. Cas particulier de la matrice $M(1,1,2)$**.**

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice $M(1,1,2)$. On définit la famille de vecteurs $\mathcal{C} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par :

$\vec{u} = (1,0,0)$, $\vec{v} = (0,1,0)$, $\vec{w} = (2,1,1)$

1. Si $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = 0$ alors $(x+2z, y+z, z) = 0$ donc $z = 0 : y = 0$ et $x = 0$

   $\mathcal{C}$ est donc une famille libre de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{u}) = \vec{u}$ et $\vec{u} \neq 0$

   $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{w}) = 2\vec{w}$ et $\vec{w} \neq 0$

   Conclusion : $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ sont deux vecteurs propres de } f \text{ associés à 1 et 2}}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(\vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$.

   On a donc les coordonnées des images de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans $\mathcal{C}$ et

   Conclusion : $\boxed{T = \mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$."

   Initialisation : $T^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

   Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

alors $T^{n+1} = T^n T = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.}$

5. La matrice de passage R de la base canonique à la base $\mathcal{C}$ est

$$R = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$RQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{R^{-1} = Q}$

6. En notant $\mathcal{B}$ la base canonique on a, d'après la formule de changement de base

$$\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) \operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(f) \operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B})$$

Conclusion : $\boxed{M(1,1,2) = R \cdot T \cdot Q}$

7. *Conclusion :* $\boxed{[M(1,1,2)]^n = R \cdot T^n \cdot Q.}$

Exercice 23. Etude d'une suite de matrices [Ecricome 2012]

$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3\mathbb{R}$ telle que :

$$L = AL + B.$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{n\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$$

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "$U_n = L + A^n(U_0 - L)$."
<u>**Initialisation :**</u> $L + A^0(U_0 - L) = L + U_0 - L = U_0$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
<u>**Hérédité :**</u> On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n + B \\ &= A[L + A^n(U_0 - L)] + B \\ &= AL + A^{n+1}(U_0 - L) + B \\ &= L + A^{n+1}(U_0 - L) \qquad \text{car } AL + B = L. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : $\boxed{U_n = L + A^n(U_0 - L) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$
Dans la suite du problème les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On note :
— Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$;
— a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A ;
— b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B ;

— $\mathrm{Im}\,(b)$ l'image de l'endomorphisme b ;
— $\mathrm{Im}\,(Id - a)$ l'image de l'endomorphisme $\mathrm{Id} - a$.

2. Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si
$$-x + y + z = 0.$$
$\mathrm{Im}\,(b) = \mathrm{Vect}\,((3,1,2)\,,(-1,0,-1)\,,(-2,-1,-1))$ et comme $(3,1,2) + (-1,0,-1) + (-2,-1,-1) = 0$ donc
$$\mathrm{Im}\,(b) = \mathrm{Vect}\,((-1,0,-1)\,,(-2,-1,-1))\,.$$
On reprend par l'équation : $-x + y + z = 0 \Longleftrightarrow x = y + z$ qui a pour solutions : $E = \mathrm{Vect}\,((1,1,0)\,,(1,0,1))$
Montrons que $E = \mathrm{Im}(b)$. Les familles génératrices sont libres (2 vecteurs non colinéaires). Les deux sous espaces sont donc de dimension 2. De plus $(-1,0,-1)$ et $(-2,-1,-1)$ satisfont l'équation $-x+y+z = 0$ donc $\mathrm{Im}\,(b) \subset E$ et comme les deux ont même dimension $\mathrm{Im}\,(b) = E$. Ainsi
$$u = (x, y, z) \in \mathrm{Im}(b) \Leftrightarrow -x + y + z = 0.$$
Pour $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - a)$, on détermine sa matrice dans la base canonique :
$$I - A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
On a donc
$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - a) = \mathrm{Vect}\,((6,4,2)\,,(-3,0,-3)\,,(-3,-4,1))\,.$$
De plus, $(6,4,2) = -(-3,0,-3) - (-3,-4,1)$, donc
$$\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - a) = \mathrm{Vect}\,((-3,0,-3)\,,(-3,-4,1))\,.$$
La famille $((-3,0,-3)\,,(-3,-4,1))$ est une famille libre (les deux vecteurs sont non colinéaires) et génératrice, donc une base de $\mathrm{Im}\,(Id - a)$ et $\dim\,(Id - a) = 2$.
De plus, $(-3,0,-3)$ et $(-3,-4,1)$ satisfont l'équation $-x + y + z = 0$ donc appartiennent à $Im\,(b)$ donc $\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - a) \subset \mathrm{Im}\,(b)$. Comme $\dim\,(\mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - a)) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(b)) = 2$, on peut conclure que
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}\,(b) = \mathrm{Im}\,(\mathrm{Id} - a)}$

3. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
On doit montrer que les colonnes sont propres et forment une base :
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Donc $(1,1,1) \neq 0$ est vecteur propre de a associé à la valeur propre 1.
$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
Donc $(1,0,1)$ est vecteur propre de a associé à la valeur propre $\dfrac{1}{2}$.
$$A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
Donc $(0,-1,1)$ est vecteur propre de a associé à la valeur propre $\dfrac{1}{3}$.
Comme a, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (dimension 3), a 3 valeurs propres distinctes, alors a est diagonalisable et $\mathcal{C} = ((1,1,1)\,,(1,0,1)\,,(0,-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Conclusion : $\boxed{P \text{ la matrice de passage de la base canonique de } \mathbb{R}^3 \text{ à une base de vecteurs propres de } a.}$

4. Les vecteurs étant propres, la matrice de a dans la base $\mathcal{C}$ est

$$D = \operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

On calcule leurs images par b :

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc $b((1,1,1)) = 0$.

$$B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $b(1,0,1) = (1,0,1)$, ainsi $\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(1,0,1) = (0,1,0)$.

$$B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $b(0,-1,1) = (-1,-1,0)$ et on cherche ses coordonnées dans $\mathcal{C} = ((1,1,1),(1,0,1),(0,-1,1))$:

$$(-1,-1,0) = x(1,1,1) + y(1,0,1) + z(0,-1,1) \iff \begin{cases} x+y=-1 \\ x-z=-1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-1-x \\ z=x+1 \\ x=0 \end{cases}$$

Donc $(-1,-1,0) = -(1,0,1) + 1(0,-1,1)$ et a pour coordonnées $(0,-1,1)$ dans $\mathcal{C}$

Conclusion : $\boxed{B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

5. D'après la formule de changement de base,

$$A = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(a) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(a)\operatorname{mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{B}) = PDP^{-1}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "$A^n = PD^nP^{-1}$."
<u>**Initialisation :**</u> $PD^0P^{-1} = I = A^0$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
<u>**Hérédité :**</u> On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$
alors $A^{n+1} = A^nA = PD^nP^{-1}PD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N} : A^n = PD^nP^{-1}.}$

6. On a $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ diagonale et avec $E' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $F' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $G' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}$, on a donc

$$D = E' + \left(\frac{1}{2}\right)^n F' + \left(\frac{1}{3}\right)^n G'.$$

On en conclut qu'en posant $E = PE'P^{-1}$, $F = PF'P^{-1}$ et $G = PG'P^{-1}$

$$\begin{aligned} A^n &= P\left(E' + \left(\frac{1}{2}\right)^n F' + \left(\frac{1}{3}\right)^n G'\right)P^{-1} \\ &= E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G. \end{aligned}$$

Calculons P^{-1}. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ tels que

$$PX=Y \iff \begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{c} x_1+x_2=y_1\\ x_1-x_3=y_2\\ x_1+x_2+x_3=y_3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} -x_3=y_1-y_3, \quad L_1\leftarrow L_1-L_3\\ x_1-x_3=y_2\\ x_1+x_2+x_3=y_3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} x_3=-y_1+y_3\\ x_1=y_2+x_3=-y_1+y_2+y_3\\ x_2=y_3-x_1-x_3=2y_1-y_2-y_3\end{array}\right.$$

Donc $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$ et

$$E=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&-1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

7. Soit $L'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&p&q\\0&0&r\end{pmatrix}$

$DL'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&p&q\\0&0&r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\frac12 p&\frac12 q\\0&0&\frac13 r\end{pmatrix}$ et $B'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

Donc $L'=DL'+B' \iff \left\{\begin{array}{l} p=\frac12 p+1\\ q=\frac12 q-1\\ r=\frac13 r+1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} p=2\\ q=-2\\ r=\frac32\end{array}\right.$ Ainsi

$$L'=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-2\\0&0&\frac32\end{pmatrix}$$

8. Comme $A=PDP^{-1}$ et que $B=PB'P^{-1}$ alors

$$L'=DL'+B' \quad \iff \quad L=PL'P^{-1}=PDPP^{-1}L'P^{-1}+PB'P^{-1}=AL+B$$

Conclusion : $\boxed{L=AL+B.}$

9. On passe par les matrices associées dans $\mathcal{C}$:

$$E'L'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&-2\\0&0&\frac32\end{pmatrix}=0$$

et donc $EL=PE'P^{-1}PL'P^{-1}=PE'L'P^{-1}=0$.

10. On a

$$U_n=L+A^n\left(U_0-L\right) \text{ avec } A^n=E+\left(\frac12\right)^n F+\left(\frac13\right)^n G.$$

On a $\left(\frac12\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\left|\frac12\right|<1$ et de même $\left(\frac13\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$A^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E.$$

Ainsi $U_n=L+A^n\left(U_0-L\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L+E\left(U_0-L\right)=L+EU_0-EL$ et comme $EL=0$ alors

Conclusion : Chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice EU_0+L.

Exercice 24. Les valeurs propres de ces matrices sont sur leur diagonale [ESSEC 2010 Maths I]

Dans tout ce problème, on note n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées possédant n lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des matrices $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

(Δ_1) les coefficients diagonaux $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$ de la matrice M sont des valeurs propres de M ;

(Δ_2) la matrice M n'a pas d'autres valeurs propres que les nombres $m_{1,1}$, ..., $m_{n,n}$.

Partie I. Généralités et exemples

1. Quand une matrice est triangulaire, ses valeurs propres sont exactement les termes de sa diagonale.
   Conclusion : $\boxed{\text{Les matrices triangulaires de} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ appartiennent à } \mathcal{D}_n.}$
2. Soit M une matrice de $\mathcal{D}_n$.
   Les valeurs propres de M sont donc les termes de sa diagonale.
   Or λ est valeur propre de $(M+\alpha I_n) \iff (M+\alpha I_n - \lambda I_n) = (M-(\lambda-\alpha)I_n)$ est non inversible
   $\iff \lambda-\alpha$ est valeur propre de $M \iff \lambda-\alpha$ est sur la diagonale de $M \iff \lambda$ est sur la diagonale de $M+\alpha I_n$.
   Conclusion : $\boxed{\text{Si } M \text{ est une matrice de } \mathcal{D}_n\text{, la matrice } M+\alpha I_n \text{ est encore un élément de } \mathcal{D}_n}$
3. On note K_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.
   (a) $K_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ donc n ($\neq 1$) est valeur propre de K_n.
   Or K_n n'a que des 1 sur la diagonale.
   Conclusion : $\boxed{\text{la matrice } K_n \text{ n'appartient pas à } \mathcal{D}_n}$
   (b) On découpe K_n en la somme d'une triangulaire supérieure T_s et d'une triangulaire inférieure T_i (les termes de la diagonale pouvant être placé au choix dans l'une ou l'autre),
   T_s et T_i sont éléments de $\mathcal{D}_n$, mais leur somme K_n n'y est pas.
   Donc $\mathcal{D}_n$ n' est pas stable par l'addition.
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_n \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
4. (a) Soit (x,y,z) un élément de $\mathbb{R}^3$.
   Par la méthode de Gauss : $\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \iff \begin{pmatrix} y & z \\ 0 & x \end{pmatrix}$ triangulaire, est inversible si et seulement si les nombres x et y sont non nuls.
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2$
   Ses valeurs propres sont a et d donc
   $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - aI = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d-a \end{pmatrix}$ est non inversible donc c ou b est nuls (d'après la question précédente)
   Donc M est triangulaire.
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_2 \text{ ne contient pas d'autre élément que les matrices triangulaires de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$
5. On vérifie que les valeurs propres de A sont 3, 2 et 4 : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
   - $A-3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 3 est valeur propre.
   - $A-2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ non inversible (deux colonnes identiques) donc 2 est valeur propre.
   - $A-4I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} L_3+L_1 \to L_3$
   $\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} L_3+L_2 \to L_3$
   $\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non inversible (triangulaire avec un terme diagonal nul) donc 4 est valeur propre.

Et comme A est d'ordre 3 elle ne peut pas avoir plus de 3 valeurs propres distinctes.

Donc les valeurs propres de A sont 2, 3 et 4 et comme elle a trois valeurs propres distinctes et qu'elle est d'ordre 3,

Conclusion : $\boxed{A \in \mathcal{D}_3 \text{ et est diagonalisable}}$

6. Pour tout t réel, on considère la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1+t \\ 0 & 2 & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t \end{pmatrix}$.

   (a) Par la méthode de Gauss, on détermine les conditions d'inversibilité de $M(t) - \alpha I$:

   $\begin{pmatrix} 3-\alpha & 1 & 1+t \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 1 & 1 & 4+2t-\alpha \end{pmatrix} L_3 \leftrightarrow L_1$

   $\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 3-\alpha & 1 & 1+t \end{pmatrix} L_3 - (3-\alpha) L_1 \leftrightarrow L_3$

   $\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & -2+\alpha & * \end{pmatrix} L_3 + L_2 \to L_3$ avec $* = 1+t-(3-\alpha)(4+2t-\alpha)$

   $\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4+2t-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1-t \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(4+2t-\alpha) \end{pmatrix}$ triangulaire

   Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } M(t) \text{ sont } 2,\ 3 \text{ et } 4+2t}$

   Conclusion : $\boxed{M(t) \in \mathcal{D}_3 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}}$

   (b) Si $4+2t \neq 2$ ($\iff t \neq -1$) et $4+2t \neq 3$ ($\iff t \neq -1/2$) alors $M(t)$ a trois valeurs propres distinctes et $M(t)$ est diagonalisable.

   <u>Si $t=-1$</u> : $M(-1) - \alpha I \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(2-\alpha) \end{pmatrix}$

   et pour $\alpha = 2$, (x,y,z) est vecteur propre associé à $2 \iff x+y=0$ donc le sous espace propre associé est $E_2 = \text{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$.

   La famille étant de deux vecteurs non colinéaire est libre, et forme donc une base de E_2 et $\dim(E_2) = 2$

   Comme la dimension du sous espace associé à 3 est au moins 1 alors $\dim(E_2) + \dim(E_3) \geq 3$ (cette dimension est donc 1)

   Conclusion : $\boxed{t=-1,\ M(-1) \text{ est diagonalisable}}$

   <u>Si $t=-1/2$</u> : $M(-1/2) - \alpha I \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3-\alpha \\ 0 & 2-\alpha & -1/2 \\ 0 & 0 & -(3-\alpha)(3-\alpha) \end{pmatrix}$

   Pour $\alpha = 3$ alors (x,y,z) est vecteur propre associé à $3 \iff \begin{cases} x+y=0 \\ -y-\frac{1}{2}z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ z=-2y \end{cases}$

   Donc le sous espace propre associé à 3 est $E_3 = \text{Vect}(-1,1,-2)$ qui est de dimension 1

   Pour $\alpha = 2$ alors (x,y,z) est vecteur propre associé à $2 \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ \frac{-1}{2}z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y \\ z=0 \end{cases}$

   Donc le sous espace propre associé à 2 est $E_2 = \text{Vect}(-1,1,0)$ qui est de dimension 1

   Donc la somme des dimensions des sous espaces propres est 2 alors que $M(-1/2)$ est d'ordre 3

   Conclusion : $\boxed{\text{La seule valeur de } t \text{ pour laquelle } M(t) \text{ n'est pas diagonalisable est } t=-1/2}$

Partie II. Matrices nilpotentes

Une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est *nilpotente* si, et seulement si, il existe un entier naturel p non nul tel que la matrice M^p soit la matrice nulle.

1. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   Il existe donc $p \neq 0$ tel que $M^p = 0$ et le polynôme X^p est annulateur de M.

   Si α est valeur propre de M alors $\alpha^p = 0$ et donc $\alpha = 0$

   Reste à montrer que 0 est bien valeur propre de M :

   Comme $M^p = 0$ alors M est non inversible (sinon M^p le serait) donc 0 est valeur propre

   Conclusion : $\boxed{0 \text{ est la seule valeur propre de } M.}$

2. Soit M une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On va prouver par l'absurde que M^3 est la matrice nulle. Pour cela, on suppose que M^3 n'est pas la matrice nulle.

   Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

   (a) Si $x \in$Ker(u) et comme $u(0) = 0$ (car u linéaire) alors $u(u(x)) = 0$ donc $x \in \text{Ker}\left(u^2\right)$

   Et de même si $x \in \text{Ker}\left(u^2\right)$ alors $u^2(x) = 0$ donc $u\left(u^2(x)\right) = u(0) = 0$

   Conclusion : $\boxed{\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \text{ et } \text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u^3).}$

   (b) Si Ker(u^2) =Ker(u^3) alors par récurrence, pour $i \geq 2$:

   Si $\text{Ker}\left(u^i\right) = \text{Ker}\left(u^2\right)$, pour $x \in \text{Ker}\left(u^{i+1}\right)$ on a $0 = u^{i+1}(x) = u^3\left(u^{i-2}(x)\right)$ donc $u^{i-2}(x) \in \text{Ker}\left(u^3\right) = \text{Ker}\left(u^2\right)$ donc $u^2\left(u^{i-2}(x)\right) = 0$ et $u^i(x) = 0$. Donc $x \in \text{Ker}\left(u^i\right)$

   Alors $\text{Ker}\left(u^{i+1}\right) \subset \text{Ker}\left(u^i\right)$ et l'inclusion réciproque étant toujours vraie (cf a) donc $\text{Ker}\left(u^{i+1}\right) = \text{Ker}\left(u^i\right) = \text{Ker}\left(u^2\right)$

   Conclusion : $\boxed{\text{Si Ker}(u^2) = \text{Ker}\left(u^3\right) \text{ alors pour tout } i \geq 2 : \text{Ker}(u^i) = \text{Ker}\left(u^2\right)}$

   On a supposé que $M^3 \neq 0$ donc $M^2 \neq 0$ et $\text{Ker}\left(u^2\right) \neq \mathbb{R}^3$.

   Donc pour tout entier i : Ker$(u^i) \neq \mathbb{R}^3$ et donc $u^i \neq 0$ et enfin $M^i \neq 0$ et finalement

   Conclusion : $\boxed{\text{Si Ker}(u^2) = \text{Ker}\left(u^3\right) \text{ alors } M \text{ n'est pas nilpotente donc Ker}(u^2) \neq \text{Ker}\left(u^3\right)}$

   (c) De même si Ker(u) =Ker(u^2) alors (récurrence) pour tout i : Ker(u^i) =Ker(u) et M n'est pas nilpotente

   Conclusion : $\boxed{\text{Ker}(u) \neq \text{Ker}\left(u^2\right)}$

   (d) Comme Ker$(u) \subset$ Ker$(u^2) \subset$Ker(u^3) et que les inclusions sont strictes, et que $\text{Ker}(u) \neq \{0\}$ alors

   $$0 < \dim(\text{Ker}(u)) < \dim\left(\text{Ker}(u^2)\right) < \dim\left(\text{Ker}(u^3)\right) \leq 3$$

   (Un sous espace de même dimension que l'espace est l'espace lui même)

   les dimension étant entières, $1 \leq \dim(\text{Ker}(u))$ puis $2 \leq \dim(\text{Ker}(u)) + 1 \leq \dim\left(\text{Ker}(u^2)\right)$ et enfin $3 \leq \dim\left(\text{Ker}(u^2)\right) + 1 \leq \dim\left(\text{Ker}(u^3)\right)$

   Conclusion : $\boxed{\dim(\text{Ker}(u)) = 1 : \dim\left(\text{Ker}(u^2)\right) = 2 \text{ et } \dim\left(\text{Ker}(u^3)\right) = 3}$

   Donc Ker(u^3) =$\mathbb{R}^3$, d'où $u^3 = 0$ et $M^3 = 0$ (si, hypothèse de départ, $M^3 \neq 0$)

   Donc par l'absurde, M^3 n'est pas non nulle,

   Conclusion : $\boxed{M^3 = 0}$

3. Soit (a, b, c, d, e, f) un élément de $\mathbb{R}^6$. On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On définit les réels $\gamma(M) = ac + df + be$ et $\delta(M) = bcf + ade$.

   (a) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac + be & bf & ad \\ ed & ac + df & cb \\ fc & ae & eb + df \end{pmatrix}$

   et $M^3 = \begin{pmatrix} ade + bcf & abe + a^2c + adf & b^2e + abc + bdf \\ ac^2 + cdf + bce & ade + bcf & dac + d^2f + bde \\ be^2 + def + ace & fbe + df^2 + acf & ade + bcf \end{pmatrix}$

   $\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = (ac + df + be)\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & 0 \end{pmatrix} + (bcf + ade)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M^3$

   (b) Si $\gamma(M)$ et $\delta(M)$ sont nuls, alors $M^3 = 0$ donc M est nilpotente.

   Si M est nilpotente alors, d'après la question (2), $M^3 = 0$ donc $\gamma(M)M + \delta(M)I_3 = 0$.

   On a alors

   — ou bien tous ses coefficients ne sont pas nuls, alors (M, I) est libre (2 matrices non proportionnelles) donc $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$

   — ou bien tous ses coefficients sont nuls, alors $\gamma(M) = 0$ et $\delta(M) = 0$

   Conclusion : $\boxed{M \text{ est nilpotente si et seulement si } \gamma(M) \text{ et } \delta(M) \text{ sont nuls}}$

   (c) On suppose que a, b et d sont égaux à 1.

   Donc M est nilpotente si et seulement si (1) : $ac + df + be = c + f + e = 0$ et $bcf + ade = cf + e = 0$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} e = -cf \\ c + f - cf = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} e = -cf \\ c(1-f) = -f \end{array} \right.$ et pour $f \neq 1$

$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e = f^2/(1-f) \\ c = -f/(1-f) \end{array} \right.$

Donc pour chaque $f \neq 1$ il y a une solution, ce qui en fait une infinité.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{il existe une infinité de choix pour le triplet } (c,e,f) \text{ de } \mathbb{R}^3 \\ \text{pour lesquels la matrice } M \text{ est nilpotente.}\end{array}}$

(d) Or, pour a, b et d égaux à 1 et $f \neq 1$ et non nul (pour que la matrice M ne soit pas triangulaire) alors la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -f/(1-f) & 0 & 1 \\ f^2/(1-f) & f & 0 \end{pmatrix}$ est non triangulaire et nilpotente.

Comme elle est nilpotente, sa seule valeur propre est 0.

Comme le seul terme sur sa diagonale est 0, on a $M \in \mathcal{D}_3$

Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_3 \text{ contient une infinité de matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires.}}$

(e) Pour avoir tous les coefficients non nuls, on recycle le partie I 2)

Avec $f = 2$ on $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ donc $M + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_3$ a tous ses coefficients non nuls.

Exercice 25. Endomorphisme d'un espace vectoriel de polynômes [Ecricome 2006]

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à l'entier naturel 2. On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ réel :} \qquad Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\text{pour tout réel } x : \qquad P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x \text{ et } P_2(x) = x^2$$

1. On peut faire par étape :
   f est définie sur E car toute fonction polynôme est dérivable.
   Soit P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
   P' sera de degré inférieur ou égal à 1. et $x \to (x-1)P'(x) + P(x)$ sera un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.
   Donc f est une application e E dans E.
   Pour la linéarité :
   Soient P et R de E et α et β réels,
$$\begin{aligned} f(\alpha P + \beta R)(x) &= (x-1)(\alpha P + \beta R)'(x) + (\alpha P + \beta R)(x) \\ &= (x-1)\alpha P'(x) + (1-x)\beta R'(x) + \alpha P(x) + \beta R(x) \\ &= \alpha f(P)(x) + \beta f(R)(x) \end{aligned}$$
   Donc $f(\alpha P + \beta R) = \alpha f(P)(x) + \beta f(R)(x)$
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$
   On peut aussi faire plus rapide :
   Soit $P \in E : P(x) = a + bx + cx^2$
   Alors $f(P)$ est définie et $f(P)(x) = (x-1)(b + 2cx) + a + bx + cx^2 = a - b + (2b - 2c)x + 3cx^2$
   Donc $f(P)$ est un polynôme de E.
   et $f(P)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} a - b \\ 2b - 2c \\ 3c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
   Donc f est l'endomorphisme de E associé à A dans la base canonique.
   Donc f est un endomorphisme de E et sa matrice est A.
2. On calcule les images des vecteurs de la base canonique, et leurs coordonnées.
   $P(x) = 1$ alors $P'(x) = 0$ et $f(P)(x) = P(x) = 1$ (coordonnées $(1,0,0)$)
   $P(x) = x$ alors $P'(x) = 1$ et $f(P)(x) = (x-1) + x = 2x - 1$ (coordonnées $(-1,2,0)$)
   $P(x) = x^2$ alors $P'(x) = 2x$ et $f(P)(x) = (x-1)2x + x^2 = 3x^2 - 2x$ (coordonnées $(0,-2,3)$)
   Donc la matrice A de f dans $\mathcal{B}$, est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont sur la diagonale.
   Conclusion : $\boxed{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont donc 1, 2 et 3.}}$
   Comme f a trois valeurs propres distinctes, $\boxed{\text{elle est diagonalisable.}}$
   Comme aucune valeur propre n'est nulle, f est bijective et $\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E}$
4. On a
$$\text{pour tout réel } x : \qquad R_0'(x) = 0,\ R_1'(x) = 1 \text{ et } R_2(x) = 2(x-1)$$
   donc
$$\begin{aligned} f(R_0)(x) &= 0 + 1 = 1 \\ f(R_1)(x) &= (x-1) + x - 1 = 2(x-1) \\ f(R_2)(x) &= (x-1)\,2(x-1) + (x-1)^2 = 3(x-1)^2 \end{aligned}$$
   Conclusion : $\boxed{f(R_0) = R_0 : f(R_1) = 2R_1 : f(R_2) = 3R_2}$
5. Comme les trois sont non nuls, ce sont des vecteurs propres associés.
   Ils sont associés à des valeurs propres distinctes, donc ils forment une famile libre.
   Ils sont trois et E est de dimension 3.
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2) \text{ est une base de vecteurs propres de } f.}$
   On a leurs coordonnées dans la base canonique :
   $R_0(x) = 1$: coordonnées $(1,0,0)$
   $R_0(x) = x - 1$: coordonnées $(-1,1,0)$
   $R_2(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x = 1$: coordonnées $(1,-2,1)$
   Donc
$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
6. on vérifie pour tout réel x :
$$\begin{aligned} R_2 x + 2R_1(x) + R_0(x) &= x(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = x^2 = P_2(x) \\ R_1(x) + R_0(x) &= (x-1) + 1 = P_1(x) \end{aligned}$$
   Donc P_2 a pour coordonnées $(1,2,1)$ dans $\mathcal{B}'$
   P_1 a pour coordonnées $(1,1,0)$ et enfin $P_0 = R_0$ apour coordonées $(1,0,0)$ dans $\mathcal{B}'$.
   Donc la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ est
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (ce que l'on peut vérifier en calculant le produit $P^{-1}P = I$)
7. La formule de changement de base donnc alors $A = PDP^{-1}$ et $A^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1} P^{-1}$
   Conclusion : $\boxed{A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}}$
   N.B. : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, l'ordre du produit s'inverse !
   On a alors par récurrence
   — Pour $n = 0$: $P\left[D^{-1}\right]^0 P^{-1} = I = A^0$
   — Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}$
   alors $\left[A^{-1}\right]^{n+1} = A\left[A^{-1}\right]^n = PDP^{-1}P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1} = P\left[D^{-1}\right]^{n+1} P^{-1}$
   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier } n : \left[A^{-1}\right]^n = P\left[D^{-1}\right]^n P^{-1}.}$
   La troisième colonne de la matrice $\left[A^{-1}\right]^n$ est issue du produit par la troisième colonne de P^{-1}.
   On connait les puissnce de D car D est diagonale.
$$\begin{aligned} \left[A^{-1}\right]^n &= P\left[D^{-1}\right]^n \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \\ \dots & 1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1^{-n} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{-n} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \\ \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots & 1 \\ \dots & 2 \cdot 2^{-n} \\ \dots & 3^{-n} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots & 1 - 2 \cdot 2^{-n} + 3^{-n} \\ \dots & 2 \cdot 2^{-n} - 2 \cdot 3^{-n} \\ \dots & 3^{-n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 26. Diagonalisation dépendant d'un paramètre [EM Lyon 1994]

On considère la matrice $A(a)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On détermine les valeurs de λ pour lesquelles $A(a) - \lambda I$ est non inversible :

$$A(a) - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & a^2 \\ 0 & -\lambda & a^2 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & a^2 \\ 1-\lambda & -1 & a^2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & a^2 \\ 0 & -1 & a^2 + \lambda(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & a^2 + \lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & a^2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_3 - \lambda L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & a^2 + \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & a^2 - \lambda a^2 + \lambda^2 - \lambda^3 \end{pmatrix}$$

On en conclut que

$$A(a) - \lambda I \text{ est non inversible } \Leftrightarrow a^2 - \lambda a^2 + \lambda^2 - \lambda^3 = 0.$$

Ce polynôme de degré 3 a une racine évidente qui est $\lambda = 1$, on factorise donc le polynôme par $(\lambda - 1)$:

$$a^2 - \lambda a^2 + \lambda^2 - \lambda^3 = (\lambda - 1)(\lambda - a)(\lambda + a)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } A(a) \text{ sont } 1,\ a \text{ et } -a}$

On note que les valeurs propres peuvent être identiques si $a = 1$ ou $a = -1$ ou $a = 0$.

2. $A(a)$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre

Conclusion : $\boxed{A(a) \text{ est inversible pour } a \neq 0 \text{ et non inversible pour } a = 0}$

3. On suppose dans cette question 3. seulement : $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq -1$

(a) Dans ce cas, $A(a)$ possède trois valeurs propres distinctes car $a \neq 1$, $a \neq -1$ et $a \neq -a$.
Donc $A(a)$ est diagonalisable.

(b) On résout pour chaque valeur propre :

- **Pour la valeur propre** a

$$(A(a) - aI)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (1-a)x - y + a^2 z = 0 \\ -ay + a^2 z = 0 \\ x - az = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left[(1-a)a - a + a^2\right] z = 0 \\ y = az \text{ car } a \neq 0 \\ x = az \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = az \\ x = az \end{array} \right.$$

Donc le sous espace propre associé à la valeur propre a est $\mathrm{Vect}\big((a, a, 1)\big)$.
Un vecteur propre associé est $(a, a, 1)$.

- **Pour la valeur propre** $-a$

$$(A(a) + aI)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (1+a)x - y + a^2 z = 0 \\ ay + a^2 z = 0 \\ x + az = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \left[-(1+a)a + a + a^2\right] z = 0 \\ y = -az \text{ car } a \neq 0 \\ x = -az \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = -az \\ x = -az \end{array} \right.$$

Donc le sous espace propre associé à la valeur propre $-a$ est $\mathrm{Vect}\big((-a, -a, 1)\big)$.
Un vecteur propre associé est $(-a, -a, 1)$.

- **Pour la valeur propre** 1

$$(A(a) - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -y + a^2 z = 0 \\ -y + a^2 z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = a^2 z \\ x = z \end{array} \right.$$

Donc le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}\big((1, a^2, 1)\big)$.
Un vecteur propre associé est $\big(1, a^2, 1\big)$.

4. (a) Pour savoir si la matrice $A(0)$ est diagonalisable, il faut déteminer la dimension des sous espaces propres. Les valeurs propres de $A(0)$ sont 1 et 0.

- **Pour la valeur propre** 1

$$(A(0) - I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ -y = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right.$$

Donc le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est $\mathrm{Vect}\big((1, 0, 1)\big)$ et est de dimension 1 (famille libre car formée d'un seul vecteur non nul).

- **Pour la valeur propre** 0

$$(A(0)-0I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 0=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

Donc le sous espace propre associé à la valeur propre 0 est $\mathrm{Vect}\big((0,0,1)\big)$ et est de dimension 1.
La somme des dimensions des sous espaces propres est 2 et donc différente de 3.
Conclusion : $\boxed{A\left(0\right) \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

(b) On calcule

$$A\left(0\right)^2=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\left(0\right)^3=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}=A\left(0\right)^2$$

On montre par récurrence que pour tout entier $n \geq 2$, $A\left(0\right)^n=A\left(0\right)^2$.
Pour $n \geq 2$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "$A\left(0\right)^n=A\left(0\right)^2$."
<u>Initialisation :</u> Pour $n=2$, $A\left(0\right)^n=A\left(0\right)^2$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
<u>Hérédité :</u> On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a

$$\begin{aligned} A(0)^{n+1} &= A(0)^n A(0) \\ &= A(0)^2 A(0), \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= A(0)^3 = A(0)^2 \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } n \geq 2,\ A\left(0\right)^n=A\left(0\right)^2.}$

Exercice 27. Automorphisme d'un espace vectoriel de polynômes [HEC 2013]

On note $E=\mathbb{R}_3\left[X\right]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X)=-3XP(X)+X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P.$$

1. (a) Rappelons que la base canonique de E étant la famille $\mathcal{B}=\left(1,X,X^2,X^3\right)$, E est un espace vectoriel fini de dimension $\boxed{n=4.}$

(b) Montrons que f est un endomorphisme de E :
*Pour tout couple(P_1,P_2)de E,tout couple (h_1,h_2) de réels, l(application dérivée étant linéaire

$$\begin{aligned} f(h_1P_1+h_2P_2)(X) &= -3X\left(h_1P_1+h_2P_2\right)(X)+X^2\left(h_1P_1'+h_2P_2'\right)(X) \\ &= h_1\left(-3XP_1(X)+X^2P_1'(X)\right)+h_2\left(-3XP_2(X)+X^2P_2'(X)\right) \end{aligned}$$

don $f(h_1P_1+h_2P_2)(X)=h_1f(P_1)(X)++h_2f(P_2)(X)$.
donc $\boxed{f \text{ est linéaire}}$

*Ainsi :$Im(f)=Vect\left(f(1),f(X),f(X^2),f(X^3)\right)$ avec $\begin{cases} f(1)=-3X \\ f(X)=-2X^2 \\ f(X^2)=-X^3 \\ f(X^3)=0 \end{cases}$

donc $Im(f) \subset E$
ce qui confirme que $\boxed{f \text{ est bien un endomorphisme de E}}$.

(c) Déterminons la matrice M de f dans la base canonique de E : Par les recherches précédentes, on a obtenu

$$\begin{cases} f(1)=-3X \text{ dont les coordonnées dans la base } B \text{ sont } (0,-3,0,0) \\ f(X)=-2X^2 \text{ dont les coordonnées dans la base } B \text{ sont } (0,0,-2,0) \\ f(X^2)=-X^3 \text{ dont les coordonnées dans la base } B \text{ sont } (0,0,0,-1) \\ f(X^3)=(0,0,0,0) \end{cases}$$

donc :

$$\boxed{\mathrm{M}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

(d) *La matrice M admet une colonne nulle donc elle n'est pas inversible.
*Etant en plus triangulaire, avec une diagonale ne contenant que zéro, A admet 0 pour unique valeur propre, donc
si elle était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice (*diagonale*) O_4.
Or $P^{-1}AP = O_4 \Longleftrightarrow A = O_4$,*ce* qui est faux. Donc A n'est pas diagonalisable.

$$* \text{ Calculons } M^2 = M \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{M}^3 = M^2 \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \geq 4, M^n = O_4}$

(e) P$\in$ Ker$(f), avec : X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \mathrm{mat}_B(P)$. On a

$$MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} -3x = 0 \\ -2y = 0 \\ -z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Donc : Ker$(f) = $ Vect $\left((0,0,0,1)_B = X^3\right)$ et une base de Ker(f) est $\left(X^3\right)$ avec $\boxed{\dim \mathrm{Ker}(f) = 1}$

(f) Par le théorème du rang :$\dim \ker f + \dim Imf = \dim E$,donc $\boxed{\dim Imf = 4 - 1 = 3}$ et : $Imf = vect\left(-3X, -2X^2, -X^3\right) = vect\left(X, X^2, X^3\right)$
donc . $\left(X, X^2, X^3\right)$ est une base de Imf.
en utilisant l'un des deux arguments suivants :
*$\left(X, X^2, X^3\right)$ est extraite de la base B,donc est famille libre en plus d'être génératrice de Imf :donc $\left(X, X^2, X^3\right)$ base de Imf.
*$\left(X, X^2, X^3\right)$ contient trois vecteurs et est génétrice de Imf avec $\dim Imf = 3$ donc $\left(X, X^2, X^3\right)$ base de Imf.

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = id_E$ et pour tout k de $N^*, v^k = vov^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E, u^3 \neq 0_E$ et $g = id_E + u + u^2 + u^3$.

(a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin Ker(u^3)$. Montrons que la famille $C = \left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.
*Rappelons que $\dim E = 4$,
*C contient a priori 4 vecteurs,
*montrons que cette famille est libre :
Or si $aP + bu(P) + cu^2(P) + du^3(P) = O$ (polynôme nul) *alors* en appliquant u 3 fois à cette équation ,on a successivement en utilisant $u^4(P) = O$

$$\begin{aligned} au(P) + bu^2(P) + cu^3(P) &= O \\ au^2(P) + bu^3(P) &= O \\ au^3(P) &= O \end{aligned}$$

Comme $u^3 \neq 0_E, alors\ u^i \neq 0_E, i = 0, 1, 2$ et comme $P \notin Ker(u^3), u^3(P) \neq O$
donc :

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0 \\ c &= 0 \\ d &= 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve que la famille C est libre et contient 4 vecteurs distincts, donc forme une autre base de E.

(b) **Rédaction 1 :**
Remarquons que $(id_E - u)\, og = idE - u^4 = id_E$ donc g est un automorphisme de E.
et l'automorphisme réciproque g^{-1} est l'endomorphisme $id_E - u$.
Rédaction 2 : déterminons la matrice de g dans la base C :

$$\begin{aligned} g(P) &= P + u(P) + u^2(P) + u^3(P) = (1,1,1,1)_C \\ g(u(P)) &= u(P) + u^2(P) + u^3(P) = (0,1,1,1)_C \\ g(u^2(P)) &= u^2(P) + u^3(P) = (0,0,1,1)_C \\ g(u^3(P)) &= u^3(P) = (0,0,0,1)_C \end{aligned}$$

donc

$$mat_C(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire sans zéro dans la diagonale donc elle est inversible et g est donc un endorphisme bijectif de E, c'est-à-dire un automorphisme de E.

De plus $mat_C(g^{-1}) = (mat_C(g))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow mat_C(g^{-1}) = I - mat_C(u) = mat_C(id_E - u)$

donc : par unicité de la décomposition matricielle d'un endomorphisme de E pour une base fixée : $\boxed{g^{-1} = id_E - u}$

(c) si $Q \in \ker(u)$ alors $u(Q) = O$ et $g(Q) = id_E(Q) \Leftrightarrow (g - id_E)\, Q = O$donc: $Q \in \ker(g - id_E)$.
Ainsi : $\ker(u) \subset \ker(g - id_E)$.
Par le théorème du rang :$\dim \ker u = 4 - \dim Imu$ et $\dim \ker(g - id_E) = 4 - \dim Im(g - id_E)$
or reprenant les images respectivement par u ou $g - id_E$de la base C :
*$Imu = vect\big(u(P), u^2(P), u^3(P), 0\big) \Longrightarrow \dim Imu = 3$, la famille génératrice $\big(u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$de Imu étant extraite de C.
*$Im(g - id_E) = vect\big(u(P) + u^2(P) + u^3(P), u^2(P) + u^3(P), u^3(P)\big) \Longrightarrow \dim Im(g - id_E) = 3$, la famille $\big(u(P) + u^2(P) + u^3(P), u^2(P) + u^3(P), u^3(P)\big)$ étant clairement libre par l'implication $au(P) + u^2(P) + u^3(P)) + b(u^2(P) + u^3(P)) + cu^3(P) = O \Longrightarrow (a = 0, a + b = 0, a + b + c = 0)$
donc :$dimkeru = dimker(g - id_E) = 1$ et $\boxed{\ker(u) = \ker(g - id_E)}$

(d) **Rédaction 1 :**
La rédaction matricielle de la question b) permet d'établir que 1 est la seule valeur propre de g puisque c'est la seule valeur propre de la matrice triangulaire $mat_C(g)$.
Rédaction 2 : Si $\lambda \in spec(g)$ alors g étant bijectif,$\lambda \neq 0$.
De plus s'il existe $P \neq 0$, tel que $g(P) = \lambda P$ alors $P = \lambda g^{-1}(P) = \lambda P - \lambda u(P) \Leftrightarrow u(P) = \dfrac{\lambda - 1}{\lambda} P$
donc $\dfrac{\lambda - 1}{\lambda} \in spec(u)$. Or $spec(u) = \{0\}$ (vu par exemple par $u^4 = 0_E$)
donc $\boxed{\lambda = 1}$ *est* la seule valeur propre possible
et la question précédente a fait établir que $\dim \ker(g - id_E) = 1$, donc 1 est bien valeur propre de g (qui ainsi n'est pas diagonalisable.)

3 Probabilité

3.1 Variables aléatoires discrètes

Exercice 28. Calcul d'intégrales et de sommes [Edhec 2015]

Partie I

1. (a) Pour tout $t \in [0, x]$, on a $t^2 \leqslant x^2$, donc $1 - t^2 \geqslant 1 - x^2$. Or, on a également $1 - x^2 > 0$ (car $0 < x < 1$, qui implique $x^2 < 1$). Donc $1 - t^2 \geqslant 1 - x^2 > 0$. Par conséquent, on peut passer à l'inverse et on obtient : $0 < \dfrac{1}{1 - t^2} \leqslant \dfrac{1}{1 - x^2}$, ce qui donne, en multipliant par t^m (qui est positif ou nul) :

$$0 \leqslant \frac{t^m}{1 - t^2} \leqslant \frac{t^m}{1 - x^2}.$$

On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0, x]$:

$$\int_0^x 0dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-x^2}dt$$

C'est-à-dire :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2}\int_0^x t^m dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^m dt = \left[\frac{t^{m+1}}{m+1}\right]_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$. On en déduit :

$$0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

Et donc, comme $x \leqslant 1$:

$$\boxed{0 \leqslant \int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \leqslant \frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1}}$$

(b) On a sans difficulté : $\displaystyle\frac{1}{1-x^2} \times \frac{1}{m+1} \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^x \frac{t^m}{1-t^2}dt \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

2. (a) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a $t^{2j} = (t^2)^j$. On reconnaît donc la somme des k premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2, avec $t^2 \neq 1$. D'où :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} = \frac{1-(t^2)^k}{1-t^2} = \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}}$$

(b) On intègre l'égalité ci-dessus sur l'intervalle $[0, x]$:

$$\int_0^x \sum_{j=0}^{k-1} t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1-t^{2k}}{1-t^2}dt$$

C'est-à-dire, par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{j=0}^{k-1}\int_0^x t^{2j} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt$$

Or, $\displaystyle\int_0^x t^{2j} dt = \left[\frac{t^{2j+1}}{2j+1}\right]_0^x = \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$. Donc finalement :

$$\boxed{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt}$$

(c) D'après la question 1.(b) : $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par conséquent :

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

Conclusion : la série de terme général $\displaystyle\frac{x^{2j+1}}{2j+1}$ converge et on a :

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}dt$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque. Alors :
$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$
C'est-à-dire, d'après les questions 2.(b) et 2.(c) :
$$\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt - \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt + \sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}$$
Les $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt$ se simplifient de chaque côté, et on en déduit :
$$\boxed{\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1} = \int_0^x \frac{t^{2k}}{1-t^2} dt}$$

Partie II

1. La variable aléatoire N représente le temps d'attente du premier succès (obtenir pile) à une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (les lancers de pièce), chacune ayant une probabilité de succès égale à p.
   Par conséquent, $\boxed{N \text{ suit une loi géométrique de paramètre } p}$.

2. (a) La commande `floor` renvoie la partie entière d'un nombre. Il faut donc montrer que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ est égal à m si et seulement si m est pair. Pour cela, on fait une disjonction de cas :
   — Si m est pair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k$ également. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k = m$.
   — Si m est impair, alors il existe un entier naturel k tel que $m = 2k-1$. Ceci implique $\frac{m}{2} = k - \frac{1}{2}$, et donc $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = k-1$. Par conséquent, $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = 2k-2 = m-1 \neq m$.

   Ainsi, on a montré que $2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor = m$ si et seulement si m est pair.

   $\boxed{\text{Conclusion : la commande } \texttt{2*floor(m/2)} \text{ renvoie donc la valeur de } m \text{ si et seulement si } m \text{ est pair.}}$

   (b)
```
p=input('donner la valeur de p')
N=grand(1,1,'geom', p) // 'geom' désigne une loi géométrique
X=grand(1,1,'uin', 1, N) // 'uin' désigne une loi uniforme discrète
if 2*floor(X/2)==X then
   disp('le joueur a perdu')
else
   disp('le joueur a gagné')
end
```

3. (a) Si $k \geqslant j$, alors $2k+1 > 2j$. Il est donc impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j$. Par conséquent :
$$\boxed{\mathbb{P}_{(N=2j)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j}.$$

   (b) De même, si $k \geqslant j+1$, alors $k > j$ et donc $2k+1 > 2j+1$. Par conséquent, il est impossible de tirer une boule numérotée $2k+1$ dans une urne qui ne contient que des boules numérotées de 1 à $2j+1$. On en déduit que
$$\boxed{\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X = 2k+1) = 0 \text{ si } k \geqslant j+1}.$$

   (c) Si k appartient à $[\![0, j-1]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j-1$ et donc, en particulier : $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j$. De plus, une fois l'urne remplie avec les boules numérotées de 1 à $2j$, chaque boule a la même probabilité d'être tirée. Par conséquent :
$$\boxed{\mathbb{P}_{(N=2j)}(X = 2k+1) = \frac{1}{2j} \text{ si } k \leqslant j-1}$$

(d) De même, si k appartient à $[\![0,j]\!]$, alors $1 \leqslant 2k+1 \leqslant 2j+1$. En remplissant l'urne avec des boules numérotées de 1 à $2j+1$, la boule numérotée $2k+1$ peut donc être tirée. Et comme il y a équiprobabilité :

$$\boxed{\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X=2k+1) = \frac{1}{2j+1} \text{ si } k \leqslant j}.$$

4. (a) Comme N suit une loi géométrique, on a $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Donc $\Big([N=n]\Big)_{n\geqslant 1}$ est un système complet d'événements. Par conséquent, d'après la formule des probabilités totales, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\mathbb{P}(X=2k+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\,\mathbb{P}_{(N=n)}(X=2k+1)}$$

Maintenant, on sépare la somme en deux (comme indiqué dans l'énoncé) entre, d'un côté les n pairs (qui s'écrivent sous la forme $2j$) et d'un autre côté les termes impairs (qui s'écrivent sous la forme $2j+1$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2k+1) = &\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=2j)\,\mathbb{P}_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &+\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=2j+1)\,\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\end{aligned}$$

On remplace $\mathbb{P}(N=2j)$ et $\mathbb{P}(N=2j+1)$ en se servant de la loi de N :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2k+1) &= \sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j-1}\mathbb{P}_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &\quad+\sum_{j=1}^{+\infty} pq^{2j}\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\\ &= \frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j}\mathbb{P}_{(N=2j)}(X=2k+1)\\ &\quad+\frac{p}{q}\sum_{j=1}^{+\infty} q^{2j+1}\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X=2k+1)\end{aligned}$$

Enfin, on remplace $\mathbb{P}_{(N=2j)}(X=2k+1)$ et $\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X=2k+1)$ en se servant de la question 3 :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}\,\mathbb{P}_{(N=2j)}(X=2k+1) + \frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}\,\mathbb{P}_{(N=2j+1)}(X=2k+1) \quad \text{(questions 3.a et 3.b)}\\ &= \frac{p}{q}\sum_{j=k+1}^{+\infty} q^{2j}\,\frac{1}{2j} + \frac{p}{q}\sum_{j=k}^{+\infty} q^{2j+1}\,\frac{1}{2j+1} \quad \text{(questions 3.c et 3.d)}\end{aligned}$$

D'où, en mettant $\dfrac{p}{q}$ en facteur :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\sum_{j=k+1}^{+\infty}\frac{q^{2j}}{2j} + \sum_{j=k}^{+\infty}\frac{q^{2j+1}}{2j+1}\right)}$$

(b) D'après la question I.2.d et la partie admise juste après, on a (en remplaçant dans l'égalité ci-dessus) :

$$\mathbb{P}(X=2k+1) = \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)$$

(on peut bien remplacer x par q car q appartient à $[0;1[$).
On simplifie :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=2k+1) &= \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{t^{2k+1}}{1-t^2}dt + \int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t^2}dt\right)\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k+1}+t^{2k}}{1-t^2}dt \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\ &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}(t+1)}{(1-t)(1+t)}dt\end{aligned}$$

Ce qui donne bien (en simplifiant par $t+1$) :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=2k+1)=\frac{p}{q}\int_0^q \frac{t^{2k}}{1-t}dt}$$

5. (a) Pour tout $t\in[0,q]$, on a $t\leqslant q<1$, donc $1-t\geqslant 1-q>0$, et donc, en prenant l'inverse :

$$0<\frac{1}{1-t}\leqslant\frac{1}{1-q}$$

D'où, en multipliant par $\dfrac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$ (qui est positif ou nul car $t\geqslant 0$, $1-t\geqslant 0$ et $1+t\geqslant 0$) :

$$0\leqslant\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}\leqslant\frac{1}{1-q}\times\frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}$$

On intègre cet encadrement sur l'intervalle $[0,q]$:

$$0\leqslant\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\leqslant\frac{1}{1-q}\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt$$

Or, on sait que $\displaystyle\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)(1+t)}dt\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ (question I.1.b). On en déduit, par encadrement :

$$\boxed{\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}$$

(b) On fait la somme en se servant du résultat de la question 4.(b) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n\mathbb{P}(X=2k+1)&=\sum_{k=0}^n\left(\frac{p}{q}\int_0^q\frac{t^{2k}}{1-t}dt\right)\\&=\frac{p}{q}\int_0^q\left(\sum_{k=0}^n\frac{t^{2k}}{1-t}\right)dt\quad\text{(linéarité de l'intégrale)}\\&=\frac{p}{q}\int_0^q\left(\frac{1}{1-t}\sum_{k=0}^n t^{2k}\right)dt\end{aligned}$$

On reconnaît (à l'intérieur de l'intégrale) la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison t^2 (avec $t^2\neq 1$). Donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n\mathbb{P}(X=2k+1)&=\frac{p}{q}\int_0^q\left(\frac{1}{1-t}\times\frac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}\right)dt\\&=\frac{p}{q}\int_0^q\frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)(1-t^2)}dt\\&=\frac{p}{q}\int_0^q\frac{1-t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\end{aligned}$$

Ce qui donne bien, par linéarité de l'intégrale :

$$\boxed{\sum_{k=0}^n\mathbb{P}(X=2k+1)=\frac{p}{q}\left(\int_0^q\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt-\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)}$$

(c) L'événement A est l'événement « X est impair ». On a donc $A=\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ où, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, A_n est l'événement « X est impair et $X\leqslant 2n+1$ ». De plus, $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une famille croissante d'événements. Par conséquent :

$$\mathbb{P}(A)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n).$$

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n)$ n'est autre que $\sum_{k=0}^n\mathbb{P}(X=2k+1)$, c'est-à-dire, d'après la question précédente :

$$\mathbb{P}(A_n)=\frac{p}{q}\left(\int_0^q\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt-\int_0^q\frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \frac{p}{q}\left(\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt - \int_0^q \frac{t^{2n+2}}{(1-t)^2(1+t)}dt\right)$$

C'est-à-dire, d'après la question 5.(a) :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt}$$

6. (a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2} &= \frac{a(1-t)(1+t) + b(1-t)^2 + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{a(1-t^2) + b(1-2t+t^2) + c(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}\\ &= \frac{(-a+b)t^2 + (-2b+c)t + (a+b+c)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Par identification des monômes de même degré, ceci est égal à $\dfrac{1}{(1-t)^2(1+t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a+b &=& 0\\ -2b+c &=& 0\\ a+b+c &=& 1\end{array}\right.$$

On résout ce système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -a+b=0 & & \\ -2b+c &=& 0\\ a+b+c &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& b\\ c &=& 2b\\ a+b+c &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& b\\ c &=& 2b\\ 4b &=& 1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1/4\\ c &=& 1/2\\ b &=& 1/4\end{array}\right.$$

Conclusion : pour tout $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, on a :

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{(1-t)^2}$$

avec $a = \dfrac{1}{4}$, $b = \dfrac{1}{4}$ et $c = \dfrac{1}{2}$.

(b) On reprend le résultat de la question 5.(c) et on calcule l'intégrale en se servant de la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \frac{p}{q}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}dt\\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1-t}dt + \frac{1}{4}\int_0^q \frac{1}{1+t}dt + \frac{1}{2}\int_0^q \frac{1}{(1-t)^2}dt\right)\\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{1}{4}\Big[-\ln(1-t)\Big]_0^q + \frac{1}{4}\Big[\ln(1+t)\Big]_0^q + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_0^q\right)\\ &= \frac{p}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-q} - 1\right)\right)\\ &= \frac{1-q}{q}\left(\frac{-1}{4}\ln(1-q) + \frac{1}{4}\ln(1+q) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)\\ &= \frac{1-q}{q}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{1-q}\right)\right)\end{aligned}$$

Ce qui donne, en développant :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) + \frac{1}{2}}$$

(c) On a $0 < 1-q < 1+q$ (car $q \in]0;1[$). On en déduit que $\dfrac{1+q}{1-q} > 1$, et donc $\ln\left(\dfrac{1+q}{1-q}\right) > 0$. De plus, $\dfrac{1-q}{4q} > 0$ car $1-q > 0$ et $4q > 0$. Donc

$$\frac{1-q}{4q}\ln\left(\frac{1+q}{1-q}\right) > 0.$$

On en déduit, avec l'expression obtenue à la question précédente :

$$\boxed{\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}}$$

Exercice 29. Probabilités conditionnelles [Edhec 2004]

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On lance n fois une pièce équilibrée (c'est-à-dire donnant pile avec la probabilité 1/2 et face également avec la probabilité 1/2), les lancers étant supposés indépendants.

On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on n'obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, dans le cas contraire, prend pour valeur le rang du premier pile.

1. (a) Le premier pile advient au plus tôt au premier tirage et au plus tard au $n^{ème}$ lancer. Enfin, si l'on n'a pas de pile, $Z = 0$. Donc les valeurs possibles de Z sont : $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

   (b) • Si $1 \le k \le n$, alors l'événement $[Z = k]$ signifie que l'on a le premier pile lors du $k^{ième}$ lancer. On note F_j l'événement : "on obtient face au $j^{ième}$ lancer" et P_j l'événement : "on obtient pile au $j^{ième}$ lancer" . Donc

   $$[Z = k] = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_{k-1} \cap P_k.$$

   Les lancers étant indépendants, $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\ldots\mathbb{P}(F_{k-1})\,\mathbb{P}(P_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ si $1 \le k \le n$.

   • Si $k = 0$ alors $[Z = 0]$ signifie que l'on a pas eu de pile lors de ces n lancers. Donc

   $$[Z = 0] = F_1 \cap \cdots \cap F_n$$

   et comme les lancers sont indépendants, $\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(F_1)\ldots\mathbb{P}(F_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   Donc $\mathbb{P}(Z = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\mathbb{P}(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ si $1 \le k \le n$.

   (c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Z = k)$ en mettant à part la valeur $k = 0$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(Z = 0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Z = k) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{h=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{h+1} \quad \text{avec le changement d'indice } h = k - 1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{h} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1
\end{aligned}$$

   Ce qui est cohérent avec une loi de variable aléatoire.

On dispose de $n+1$ urnes $U_0, U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout k de $\{0, 1, ..., n\}$ l'urne U_k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires.

On effectue des tirages d'une boule, au hasard et avec remise dans ces urnes de la façon suivante : si après les lancers de la pièce décrits dans la première question, la variable Z prend la valeur k (avec $k \ge 1$), alors on tire une par une et avec remise, k boules dans l'urne U_k et l'on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

2. Au minimum, on a $X = 0$ (quand on a $Z = 0$ ou quand on n'obtient aucune boule blanche) au maximum, on fait n tirages (quand $Z = n$) dans l'urne n qui contient n boules blanches.

   Donc,on obtient au minimum, $X = 0$ boules blanches et au maximum, on a $X = n$, toutes les valeurs intermédiaires étant possibles. Ainsi $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

3. (a) Quand $Z = 0$, on a $X = 0$ donc $\mathbb{P}_{Z=0}(X = 0) = 1$ et $\mathbb{P}_{Z=0}(X = i) = 0$ si $1 \le i \le n$.

   (b) Quand $Z = n$, on affectue n tirages dans l'urne n qui ne contient n boules blanches et 0 boules noires. On obtiendra donc n boules blanches.

   Donc$\mathbb{P}_{Z=n}(X = n) = 1$ et $\mathbb{P}_{Z=n}(X = i)$ si $0 \le i \le n - 1$.

   (c) Quand $Z = k$ $(1 \le k \le n - 1)$ on effectue k tirages indépendants dans l'urne k qui contient k boules blanches et $n - k$ noires. Les boules étant équiproables, la probabilité d'obtenir une blanche et de k/n à chaque tirage. Donc le nombre de boules blanche obtenues suit une loi binômiales, $\mathcal{B}(k, k/n)$

$$\mathbb{P}_{Z=k}(X = i) = \begin{cases} \binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i} & \text{si } 0 \le\ i \le\ k \\ 0, \text{ sinon.} \end{cases}$$

4. (a) On connait les probabilités conditionnnelles $\mathbb{P}_{Z=k}(X=0)$ et on veut la probabilité $\mathbb{P}(X=0)$.
On utilise donc la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Z=k)_{k\in[[0,n]]}$

$$\mathbb{P}(X=0)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}_{Z=k}(X=0)\,\mathbb{P}(Z=k)$$

Comme on a des formules particulières pour $k=0$ et $k=n$, on les traite à part :

$$\mathbb{P}(X=0)=\mathbb{P}_{Z=0}(X=0)\,\mathbb{P}(Z=0)+\mathbb{P}_{Z=n}(X=0)\,\mathbb{P}(Z=n)+\sum_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}_{Z=k}(X=0)\,\mathbb{P}(Z=k)$$

Les valeurs $\mathbb{P}_{Z=0}(X=0)$, $\mathbb{P}(Z=0)$, $\mathbb{P}_{Z=n}(X=0)$ et $\mathbb{P}(Z=n)$ ont déjà été calculées.
Dans la somme, on a $0\le k$ avec $k\ge 1$ donc $\mathbb{P}_{Z=k}(X=0)$ est donnée par la loi binômiale.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0) &= 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+0\,\mathbb{P}(Z=n)+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{k}{0}\left(\frac{k}{n}\right)^0\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}1\cdot 1\cdot\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\\
&= \frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k
\end{aligned}$$

(b) Pour $X=n$, on ne peut obtenir n boules blanches qu'en faisant n tirages, donc si $Z=n$.
Donc $(X=n)=(Z=n\cap X=n)$
Comme on a $X=n$ dès que $Z=n$ (dans l'urne n, il n'y a que des boules blanches) $(X=n)=(Z=n)$
Donc

$$\mathbb{P}(X=n)=\mathbb{P}(Z=n)=\frac{1}{2^n}.$$

(c) Pour tout i de $\{1,2,...,n-1\}$, on réutilise la formule des proabilités totales avec l système complet d'événements $(Z=k)_{k\in[\![0,n]\!]}$

$$\mathbb{P}(X=i)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}_{Z=k}(X=i)\,\mathbb{P}(Z=k)$$

avec, là encore, les valeurs $k=0$ et n à traiter à part et $\mathbb{P}_{Z=k}(X=i)$ est sinon donné par la loi binômiale, donc avec deux formules différentes pour $k\ge i$ et $k<i$ (à exprimer par rapport à k, car c'est lui l'indice de sommation).
D'où le découpage de la somme :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=i) &= \mathbb{P}_{Z=0}(X=i)\,\mathbb{P}(Z=0)+\mathbb{P}_{Z=n}(X=i)\,\mathbb{P}(Z=n)\\
&+ \sum_{k=1}^{i-1}\mathbb{P}_{Z=k}(X=i)\,\mathbb{P}(Z=k)+\sum_{k=i}^{n-1}\mathbb{P}_{Z=k}(X=i)\,\mathbb{P}(Z=k)\\
&= 0+0++\sum_{k=1}^{i-1}0\cdot\mathbb{P}(Z=k)+\sum_{k=i}^{n-1}\mathbb{P}_{Z=k}(X=i)\,\mathbb{P}(Z=k)\\
&= \sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k.
\end{aligned}$$

5. On calcule $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X=i)$ en traitant à part $i=0$ et $i=n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X=i) &= \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=n)+\sum_{i=1}^{n-1}\mathbb{P}(X=i)\\
&= \frac{1}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+\frac{1}{2^n}+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k
\end{aligned}$$

Or la somme double $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}$ porte sur les i et k tels que $1\le i\le k\le n-1$ que l'on réordonne : $1\le k\le n-1$ et $1\le i\le k$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i}^{n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k &= \sum_{1\le i\le k\le n-1}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{k}{n}\right)^i\left(\frac{n-k}{n}\right)^{k-i}-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right]\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}\right)^k-\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\right]\left(\frac{1}{2}\right)^k \text{ d'après la formule du binôme}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{n}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\\
&= \sum_{h=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{h+1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\\
&= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k\\
&= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k.
\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X=i)=\frac{2}{2^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{n-k}{2n}\right)^k=1.$$

Exercice 30. Couple de variables aléatoires et droite de régression [EM Lyon 2009]

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.

Ainsi, on a : $0<p<1$, $0<q<1$ et $p+q=1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.

On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Tant que l'on n'a pas de boule noire, la probabilité d'en obtenir une reste q (boules équiprobables)
   Donc T est le rang du premier succès dans un processus sans mémoire et
   Conclusion : $\boxed{T\hookrightarrow\mathcal{G}(q),\ E(T)=\frac{1}{q},\ V(T)=\frac{p}{q^2}\text{ et pour tout } k\ge 1 : \mathrm{P}(T=k)=p^{k-1}q}$
2. $[U=k]$ signifie que $[T=k+1]$, donc $U=T-1$ et
   Conclusion : $\boxed{U\text{ a une espérance et une variance, } E(U)=E(T)-1=\frac{p}{q}\text{ et } V(U)=V(T)=\frac{p}{q^2}}$

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

On note Z la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.

Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y=1)\cup(Z=1)$ est égale à 1. Pour tout entier naturel non nul i, on note :

- B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",
- N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

1. (a) On remarque que $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $k \geq 2$, $[X = k]$ signifie que l'on a effectué k tirages : on a donc eu $k-1$ blanches puis une noire ou $k-1$ noires puis une blanche (ce sont deux événements incompatibles).

$$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(N_1)\,\mathrm{P}_{N_1}(N_2)\cdots\mathrm{P}_{N1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(B_k) + \mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}_{B_1}(B_2)\cdots\mathrm{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k),$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier } k \geq 2 : \mathrm{P}(X = k) = q\,p^{k-1} + p\,q^{k-1}.}$

(b) On travaille sur la somme partielle. Pour $N \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \mathrm{P}(X = k) &= \sum_{k=2}^{N} \left[q\,p^{k-1} + p\,q^{k-1}\right] \\
&= q\sum_{h=1}^{N-1} p^h + p\sum_{h=1}^{N-1} q^h \text{ avec le changement d'indice} h = k-1 \\
&= q\sum_{h=0}^{N-1} p^h - q + p\sum_{h=0}^{N-1} q^h - p \\
&= q\frac{1-p^N}{1-p} - q + p\frac{1-q^N}{1-q} - p
\end{aligned}$$

Comme $|p| < 1$ et $|q| < 1$ et $p + q = 1$, on a

$$\sum_{k=2}^{N} \mathrm{P}(X = k) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} q\frac{1}{1-p} - q + p\frac{1}{1-q} - p = q\frac{1}{q} - q + p\frac{1}{p} - p = 2 - p - q = 1.$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1}$

(c) Pour $k \geq 2$, on a $|k\,\mathrm{P}(X = k)| = k\,\mathrm{P}(X = k)$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} k\,\mathrm{P}(X = k) &= q\sum_{k=2}^{N} k\,p^{k-1} + p\sum_{k=2}^{N} k\,q^{k-1} \\
&= q\sum_{k=1}^{N} k\,p^{k-1} - q + p\sum_{k=1}^{N} k\,q^{k-1} - p
\end{aligned}$$

Comme $|p| < 1$ et $|q| < 1$ et $p + q = 1$, on a

$$\sum_{k=2}^{N} k\,\mathrm{P}(X = k) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} q\frac{1}{(1-p)^2} - q + p\frac{1}{(1-q)^2} - p = q\frac{1}{q^2} - q + p\frac{1}{p^2} - p = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Donc la série converge absolument.

Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.}$

2. (a) Pour $k = 2$, $[X = 2] \cap [Y = 1]$ signifie que l'on a effectué 2 tirages et obtenu une seule blanche (donc une seule noire). On a donc pu avoir $N_1 \cap B_2$ ou $B_1 \cap N_2$ (événements incompatibles) et donc

$$\mathrm{P}((X = 2) \cap (Y = 1)) = \mathrm{P}(N_1 \cap B_2) + \mathrm{P}(N_2 \cap B_1) = pq + qp = 2pq.$$

Si $k \geq 3$ alors $(X = k) \cap (Y = 1)$ signifie que l'on n'a obtenu qu'une seule blanche (et plusieurs noires) et donc s'est arrêté sur une boule blanche.

$$[X = k] \cap [Y = 1] = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$$

Ainsi,

$$\mathrm{P}([X = k] \cap [Y = 1]) = q^{k-1}p.$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}([X = 2] \cap [Y = 1]) = 2pq \text{ et pour } k \geq 3 : \mathrm{P}([X = k] \cap [Y = 1]) = q^{k-1}p}$

(b) La loi de Y est une loi marginale du couple (X,Y) donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y=1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}([X=k]\cap[Y=1]) \\
&= \mathrm{P}([X=2]\cap[Y=1]) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathrm{P}([X=k]\cap[Y=1]) \\
&= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p\sum_{h=2}^{+\infty} q^h \\
&= 2pq + p\left(\sum_{h=0}^{+\infty} q^h - 1 - q\right) = 2pq + p\left(\frac{1}{1-q} - 1 - q\right) \\
&= pq + \frac{p}{p} - p = 1 - p + pq = q + pq
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y=1) = q(1+p).}$

(c) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $k \geq 2$ quand $[Y=k]$ on a plus d'une blanche, donc on s'arrête sur une boule noire. $[Y=k]$ signifie donc que l'on a eu k blanches puis une boule noire. Donc $\mathrm{P}(Y=k) = p^k q$.

Conclusion : $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(Y=1) = q(1+p) \text{ et } \mathrm{P}(Y=k) = p^k q \text{ pour } k \geq 2.}$

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$.

3. En inversant les rôles de blanc et noir, on inverse les rôles de Y et de Z. La loi de Z est donc la même que celle de Y en inversant les rôles de p et de q.

Conclusion : $\boxed{Z(\Omega) = \mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}(Z=1) = p(1+q) \text{ et } \mathrm{P}(Z=k) = q^k p \text{ pour } k \geq 2 \text{ et } E(Z) = \frac{1}{p}\left(1 - q + q^2\right)}$

4. Pour tout $k \geq 1$, $[X-1=k]$ signifie qu'il y a eu k tirages avant le changement de couleur.
Si les tirages se finissent par noir, on a alors $Y = k$ et $Z = 1$ donc $YZ = k$
Si les tirages se finissent par blanc, on a alors $Y = 1$ et $Z = k$ donc $YZ = k$ et donc dans tous les cas,
Conclusion : $\boxed{YZ = X - 1}$

5. Y et Z ont une espérance. X a une espérance donc $X-1$ et YZ également $E(YZ) = E(X) - 1$. Donc (Y,Z) admet une covariance et d'après la formule de Huygens

$$\mathrm{cov}(Y,Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z).$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{cov}(Y,Z) = E(X) - E(Y)E(Z) - 1}$

6. Pour information, les séries suivantes ont été simulées avec $p = 0.7$.

(a)
```
x=[7  4  14  3  4  3  4  3  6  3];
y=[6  1  13  2  3  1  3  2  5  2];
disp(corr(x,y,1)/stdev(x)/stdev(y))
 ans  =

  0.8848583
```

(b)
```
x=[7  4  14  3  4  3  4  3  6  3];
y=[6  1  13  2  3  1  3  2  5  2];
plot2d(x,y,style=-3)
xx=linspace(0,15,100);
plot(xx,corr(x,y,1)/variance(x)*(xx-mean(x))+mean(y))
```

3.2 Variables aléatoires à densité

Exercice 31. Partie entière d'une variable aléatoire à densité [Edhec 2002]

Pour tout nombre réel x, on note $[x]$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $[x] \leqslant x < [x]+1$.
Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = [X]$, Y est donc la partie entière de X et on a : $\forall k \in \mathbb{Z} \quad (Y = k) = (k \leqslant X < k+1)$

X suit la loi exponentielle de paramètre μ. On note Y la partie entière de X, et $Z = X - Y$.

1. (a) On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ car $p(X < 0) = 0$

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\begin{aligned} p(Y = k-1) &= p(k-1 \leq X < k) = \int_{k-1}^{k} \mu e^{-\mu t} dt = \left[-e^{-\mu t}\right]_{t=k-1}^{k} \\ &= e^{-\mu(k-1)} - e^{-\mu k} = e^{-\mu(k-1)}\left(1 - e^{-\mu}\right) \end{aligned}$$

   (c) Et $\left(\bar{Y}+1\right)(\Omega) = [[1, +\infty[[: p(Y+1 = k) = e^{-\mu(k-1)}(1 - e^{-\mu}) = (e^{-\mu})^{k-1}(1 - e^{-\mu})$
   On reconnait donc que $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - e^{-\mu})$

   (d) Donc $E(Y+1) = \dfrac{1}{1 - e^{-\mu}}$ et $E(Y) = \dfrac{1}{1 - e^{-\mu}} - 1$

2. (a) Pour $0 \leq x < 1$, On applique la formule des probabiltiés totales avec $(Y = k)_{k \in \mathbb{N}}$ comme système complet d'événements :

$$p(Z \leq x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(Z \leq x \cap Y = k)$$

   Avec $(Z \leq x \cap Y = k) = (X - [X] \leq x \cap [X] = k) = (k \leq X \leq k + x)$ car $0 \leq x < 1$
   Et comme

$$\begin{aligned} p(k \leq X \leq k+x) &= \int_{k}^{k+x} \mu e^{-\mu t} dt = \left(e^{-\mu k} - e^{-\mu(k+x)}\right) \\ &= \left(1 - e^{-\mu x}\right) e^{-\mu k} \end{aligned}$$

   alors

$$\begin{aligned} p(Z \leq x) &= \left(1 - e^{-\mu x}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(e^{-\mu}\right)^k \\ &= \frac{1 - e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu}} \end{aligned}$$

   (la série est convergente d'après le th des probabilités totales)

   (b) Donc la fonction de répartition de Z est :
   — $G(x) = 0$ si $x < 0$
   — $G(x) = \frac{1-e^{-\mu x}}{1-e^{-\mu}}$ si $x \in [0, 1[$
   — $G(x) = 1$ si $x \geq 1$
   G est continue sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$
   — en 0^- on a $G(x) = 0 \to 0$ et comme $G(0) = \dfrac{1 - e^{-\mu 0}}{1 - e^{-\mu}} = 0$ alors G est continue en 0
   — En 1^- on a $G(x) = \dfrac{1 - e^{-\mu x}}{1 - e^{-\mu}} \to \frac{1-e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}} = 1 = G(1)$ donc G continue en 1.
   et G est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R} - \{0, 1\}$
   Finalement Z est une variable à densité de densité $g(x) = G'(x) = \frac{\mu e^{-\mu x}}{1-e^{-\mu}}$ si $x \in [0, 1[$ et 0 ailleurs.

   (c) On étudie la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t)\, dt$ impropre en $\pm\infty$:

$\int_{-\infty}^{0} tg(t)\,dt = 0$ et $\int_{1}^{+\infty} tg(t)\,dt = 0$ il reste donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 tg(t)\,dt &= \int_0^1 t\frac{\mu e^{-\mu t}}{1-e^{-\mu}}dt \\ &= \frac{\mu}{1-e^{-\mu}}\int_0^1 te^{-\mu t}dt \quad \text{à la volée} \\ &= \frac{\mu}{1-e^{-\mu}}\left[-\frac{1}{\mu}te^{-\mu t}-\frac{1}{\mu^2}e^{-\mu t}\right]_0^1 \\ &= \frac{\mu}{1-e^{-\mu}}\left(-\frac{1}{\mu}e^{-\mu}-\frac{1}{\mu^2}\left(e^{-\mu}-1\right)\right) \\ &= -\frac{e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}+\frac{1}{\mu}\end{aligned}$$

Donc Z a une espérance qui est : $E(Z) = \frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}$

On aurait pu passer par $E(X) = \frac{1}{\mu}$ et $E(Y) = \frac{1}{1-e^{-\mu}} - 1 = \frac{e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}$ donc

$E(Z) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = \frac{1}{\mu} - \frac{e^{-\mu}}{1-e^{-\mu}}$

Mais on n'a pas le théorème dans le cours pour un mélange de variables discrètes et à densité.

Exercice 32. Utilisation de la loi normale [Edhec 2001]

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1. f est continue sur par morceaux et positive sur $\mathbb{R}$.
   $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est impropre en $\pm\infty$
   $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0dt = 0$
   $\int_0^M xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = \left[-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_0^M = 1 - e^{-\frac{M^2}{2}} \to 1$ quand $M \to +\infty$
   Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut 1
   Conclusion : $\boxed{f \text{ est bien une densité}}$
   La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f.
2. (a) Si $x \leq 0$ alors $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
   et si $x \geq 0$: $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_0^x te^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$
   (b) La médiane n'est pas négative ($F(x) = 0$).
   et pour $x \geq 0$: $F(x) = \frac{1}{2} \iff 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2} \iff \frac{x^2}{2} = \ln(2) \iff x = \sqrt{2\ln(2)}$
   Conclusion : $\boxed{\mu = \sqrt{2\ln(2)}}$
3. On appelle mode de la variable X tout réel x en lequel f atteint son maximum.
   On étudie les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.(f n'est pas maximale sur $\mathbb{R}^-$)
   f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= \left(1-x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

x	0		1		
$1-x^2$		+	0	−	2° degré
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Donc f est maximale en 1 où elle vaut :

Conclusion : $\boxed{M_0 = f(1) = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}}$

4. (a) Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ alors $1 = V\left(Y^2\right) = E\left(Y^2\right) - 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} dt$

et par parité, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^2 e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{2}$ donc $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$

Et comme $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt$ avec $\int_{-\infty}^{0} = 0$ et $\int_0^{+\infty} t f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$ alors X a une espérance et

Conclusion : $\boxed{E(X) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}.}$

(b) X^2 a une espérance si $\int_0^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$ converge :

$\int_0^M t^2 f(t)\, dt = \int_0^M t^3 e^{-t^2/2} dt$ **idée :** conserver un t avec $e^{-t^2/2}$ pour pouvoir le primitiver.

$u(t) = t^2 : u'(t) = 2t : v'(t) = te^{-t^2/2} : v(t) = -e^{-t^2/2}$ et u et v C^1 donc

$$\begin{aligned}
\int_0^M t^2 f(t)\, dt &= \left[-e^{-t^2/2} t^2\right]_0^M - \int_0^M -2te^{-t^2/2} dt \\
&= -\frac{M^2}{e^{M^2/2}} + 2\left[-e^{-t^2/2}\right]_0^M \\
&= -\frac{M^2}{e^{M^2/2}} + 2 - 2e^{-M^2/2} \\
&\to 2
\end{aligned}$$

avec $M^2 = x = o\left(e^{x/2}\right)$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\, dt$ converge et vaut $2 = E\left(X^2\right)$.

Conclusion : $\boxed{X \text{ a une variance et } V(X) = 2 - \dfrac{\pi}{2}}$

Exercice 33. Variables aléatoires à densité et variables indicatrices [Edhec 2006]

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. On vérifie les critères d'une densité de probabilité :
   — f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.
   — f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$, f est donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   — $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. Puisque f est nulle sur $]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^{1/2} f(t)dt + \int_{1/2}^1 f(t)dt = \left[\frac{1}{2(1-t)}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{-1}{2t}\right]_{1/2}^1 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 1.$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1

Conclusion : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité.}}$

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant la fonction f pour densité.

2. Pour tout x réel, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$
   — Si $x < 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0dt = 0$.
   — Si $0 \leq x < \dfrac{1}{2}$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^x \frac{1}{2(1-t)^2} dt = \left[\frac{1}{2(1-t)}\right]_0^x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{x}{2(1-x)}$.
   — Si $\dfrac{1}{2} \leq x < 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0 + \int_0^{1/2} \frac{1}{2(1-t)^2} dt + \int_{1/2}^{x} \frac{1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{-1}{2t}\right]_{1/2}^{x} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2x}$.
   — Si $x \geq 1$, $F(x) = 1$.

Conclusion :
$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \dfrac{x}{2(1-x)} & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2x} & \text{si } x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right[\\ 1 & \text{si } x\geq 1.\end{cases}$$

3. On étudie la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|tf(t)|dt$ impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. Puisque f est nulle sur $]-\infty,0[\cup[1,+\infty[$ et $t\mapsto tf(t)$ est positive sur $[0,1]$, on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|tf(t)|dt=\int_0^1 tf(t)dt=\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{t}{(1-t)^2}dt+\frac{1}{2}\int_{1/2}^1\frac{t}{t^2}dt.$$
Or pour $t\in[0,1/2]$, $\dfrac{1}{(1-t)^2}-\dfrac{1}{1-t}=\dfrac{1-(1-t)}{(1-t)^2}=\dfrac{t}{(1-t)^2}$.
On a donc
$$\int_0^{1/2}\frac{t}{(1-t)^2}dt=\int_0^{1/2}\frac{1}{(1-t)^2}-\frac{1}{1-t}dt=\left[\frac{1}{1-t}+\ln(1-t)\right]_0^{1/2}=2-1+\ln(1/2)=1-\ln(2).$$
De plus,
$$\int_{1/2}^1\frac{t}{t^2}dt=[\ln(t)]_{1/2}^1=\ln(2).$$
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}|tf(t)|dt$ converge et X a une espérance.

Conclusion : $\boxed{X \text{ a une espérance et } E(X)=\dfrac{1}{2}}$

4. (a) D'après le théoréme de transfert, on étudie l'absolue convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-1)^2f(t)\,dt$ impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. Puisque f est nulle sur $]-\infty,0[\cup[1,+\infty[$ et $t\mapsto(t-1)^2f(t)$ est positive sur $[0,1]$, on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|(t-1)^2f(t)\right|dt=\int_0^1(t-1)^2f(t)\,dt=\int_0^{1/2}(t-1)^2f(t)\,dt+\int_{1/2}^1(t-1)^2f(t)\,dt.$$
Or
$$\int_0^{1/2}(t-1)^2f(t)\,dt=\int_0^{1/2}\frac{(t-1)^2}{2(1-t)^2}dt=\left[\frac{1}{2}t\right]_0^{1/2}=\frac{1}{4}$$
et
$$\begin{aligned}\int_{1/2}^1(t-1)^2f(t)\,dt&=\int_{1/2}^1\frac{t^2-2t+1}{2t^2}dt=\int_{1/2}^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t-\ln(t)-\frac{1}{2t}\right]_{1/2}^1\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\ln(2)+1=\frac{3}{4}-\ln(2).\end{aligned}$$
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-1)^2f(t)\,dt$ converge absolument donc $(X-1)^2$ a une espérance et
$$\mathbf{E}\left((X-1)^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}(t-1)^2f(t)\,dt=1-\ln(2).$$
Conclusion : $\boxed{\mathbf{E}\left((X-1)^2\right)=1-\ln(2).}$

(b) On remarque que $X^2=(X-1)^2+2X-1$. Donc X^2 a une espérance et
$$\mathbf{E}\left(X^2\right)=\mathbf{E}\left((X-1)^2\right)+2\,\mathbf{E}(X)-1=1-\ln(2)+1-1=1-\ln(2).$$
Donc X a une variance et d'après la formule de Koenig-Huygens,
$$\mathbf{V}(X)=\mathbf{E}\left(X^2\right)-\mathbf{E}(X)^2=1-\ln(2)-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\ln 2.$$
Conclusion : $\boxed{X \text{ a une variance et } \mathbf{V}(X)=\dfrac{3}{4}-\ln 2.}$

5. On appelle variable indicatrice d'un événement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.
On considère maintenant :
   - la variable aléatoire Y, indicatrice de l'événement $\left[X \leq \frac{1}{2}\right]$
   - la variable aléatoire Z, indicatrice de l'événement $\left[X > \frac{1}{2}\right]$.

   (a) On a $Y = 1$ quand $Z = 0$ et $Y = 0$ quand $Z = 1$. On a donc $Y = 1 - Z$.
   Comme Y est fonction affine de Z, alors le coefficient de corrélation linéaire vaut 1 ou -1.
   Et comme le coefficient directeur est négatif, alors
   Conclusion : $\boxed{\rho(Y, Z) = -1.}$

   (b) D'autre part, le coefficient de corrélation linéaire est

$$\rho(Y, Z) = \frac{\operatorname{cov}(Y, Z)}{\sigma(Y)\,\sigma(Z)}$$

   Comme $\rho(Y, Z) = -1$, on a $\operatorname{cov}(Y, Z) = -\sigma(Y)\,\sigma(Z)$. De plus, $\mathbf{V}(Y) = (-1)^2\,\mathbf{V}(Z)$, alors

$$\sigma(Y) = \sigma(Z) = \sqrt{\mathbf{V}(Y)} \text{ et donc } \operatorname{cov}(Y, Z) = -\mathbf{V}(Y).$$

   Calculons la variance de Y.
   On a $\mathrm{P}(Y = 1) = \mathrm{P}\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$, on a

$$\mathbf{V}(Y) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

   Conclusion : $\boxed{\operatorname{cov}(Y, Z) = -\frac{1}{4}}$

Exercice 34. Variables aléatoires discrètes et à densité [EM Lyon 2011]

Les deux parties sont indépendantes. Soit $p \in \left]0, 1\right[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires.

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit. la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. X (qui ne s'intéresse qu'au premier essai) est le nombre de joueurs, parmi n, atteignant la cible au premier essai, indépendamment les uns des autres et avec une même probabilité p.
Conclusion : $\boxed{\text{Donc } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } E(X) = np,\ V(X) = npq.}$

2. Pour chaque joueur, la probabilité de ne pas atteindre la cible (E_i pour échec au $i^{\text{ème}}$ essai) est $\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \mathrm{P}(E_1)\,\mathrm{P}(E_2) = q^2$ par indépendance.
Donc la probabilité de l'atteindre au moins une fois est $\mathrm{P}\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = 1 - q^2$ et comme précédemment,
Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, 1 - q^2\right),\ E(Z) = n\left(1 - q^2\right) \text{ et } V(Z) = nq^2\left(1 - q^2\right)}$
On note $Y = Z - X$.

3. Y est donc le nombre de joueurs atteignant au moins une fois la cible, mais pas la première fois :
C'est le nombre de ceux l'atteignant uniquement la seconde fois.
Pour chaque joueur, la probabilité en est $\mathrm{P}(E_1 \cap S_2) = \mathrm{P}(E_1)\,\mathrm{P}(S_2) = pq$ par indépendance.
Conclusion : $\boxed{\text{Donc } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq).}$

4. (a) X et Y ne sont pas indépendantes :
$[X = n] \cap [Y = n]$ est impossible donc $\mathrm{P}([X = n] \cap [Y = n]) = 0 \neq \mathrm{P}(X = n)\,\mathrm{P}(Y = n)$

   (b) On cherche à calculer la covariance à l'aide de la formule

$$V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\operatorname{Cov}(X, Y)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\,(X,Y) &= \frac{1}{2}\left(V\,(Z) - V\,(Y) - V\,(X)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(nq^2\left(1-q^2\right) - npq\,(1-pq) - npq\right)\\
&= \frac{1}{2}nq\left(q\,(1-q)\,(1+q) - p\,(1-pq) - p\right)\\
&= \frac{1}{2}nqp\left(q\,(1+q) - 1 + pq - 1\right)\\
&= \frac{1}{2}nqp\left(q + q^2 - 2 + (1-q)\,q\right) = -np^2q
\end{aligned}$$

La covariance négative est cohérente : plus X est grand, plus Y risque d'être petit.

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1. Pour donner la loi, ne pas oublier de donner les valeurs possibles.

   On a $U\,(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}\,(U = n) = q^{n-1}p$, $E\,(U) = \dfrac{1}{p}$ et $V\,(U) = \dfrac{q}{p^2}$

On considère une variable aléatoire T telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0;+\infty[\,, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}\,(T > t) = e^{-nt}$.

2. (a) $(U = n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\,(T > t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}_{(U=n)}\,(T > t)\,\mathrm{P}\,(U = n)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}q^{n-1}p \text{ pour } t \in [0;+\infty[\\
&= \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t}q\right)^n\\
&= \frac{p}{q}e^{-t}q\frac{1}{1-e^{-t}q} \text{ car } \left|e^{-t}q\right| < 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [0;+\infty[\,, \quad \mathrm{P}\,(T > t) = \dfrac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}}}$

(b) La fonction de répartition de T est donc donnée par :

$$F\,(t) = \mathrm{P}\,(T \leq t) = 1 - \frac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}} \quad t \geq 0$$

et comme F (fonction de répartition) est croissante et positive et que $F\,(0) = 1 - \dfrac{p}{1-q} = 0$ alors $F\,(t) = 0$ pour tout $t < 0$.

(c) F est donc continue, en effet

- Sur $]-\infty, 0[$, la fonction est nulle.
- Sur $]0, +\infty[$ car $1 - q\ e^{-t} \neq 0$
- La fonction est continue en 0 car $F\,(t) = 0 \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} 0 = F\,(0)$.

Donc la fonction de répartiton de T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et T est une variable aléatoire à densité.
Une densité f est continue au point où F est de classe C^1.
Pour $t > 0$, $F\,(t) = 1 - \dfrac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}}$ ainsi

$$\begin{aligned}
F'\,(t) &= -p\frac{-e^{-t}\left(1 - qe^{-t}\right) - qe^{-t}e^{-t}}{\left(1 - qe^{-t}\right)^2}\\
&= \frac{pe^{-t}}{\left(1 - qe^{-t}\right)^2}
\end{aligned}$$

On pose par exemple $f(0) = 0$, ainsi

Conclusion : T est une variable aléatoire à densité et une densité est

$$\boxed{f\,(t) = \begin{cases} \dfrac{pe^{-t}}{\left(1 - qe^{-t}\right)^2} & \text{si } t > 0\\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}}$$

3. On note $Z = UT$

(a) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0, +\infty[,$

$$\mathrm{P}_{(U=n)}(Z > z) = \mathrm{P}_{(U=n)}(UT > z) = \mathrm{P}_{(U=n)}(T > z/n) = e^{-nz/n} = e^{-z}.$$

(b) On utilise la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\forall z \geq 0, \quad \mathrm{P}(Z > z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U = n)\,\mathrm{P}_{(U=n)}(Z > z) \\
&= e^{-z} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U = n) \\
&= e^{-z} \text{ car } (U = n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est un système complet d'événements}
\end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est donc

$$G(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z} & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

où l'on reconnaît que $\boxed{Z \text{ suit une loi } \mathcal{E}(1)}$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[,$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(U = n\ ,\ Z > z) &= \mathrm{P}(U = n)\,\mathrm{P}_{(U=n)}(Z > z) \\
&= \mathrm{P}(U = n)\, e^{-z} \\
&= \mathrm{P}(U = n)\,\mathrm{P}(Z > z)
\end{aligned}$$

3.3 Estimation

Exercice 35. Intervalle de confiance [HEC 2008]

Pour m entier supérieur ou égal à m, on considère un m-échantillon $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On pose $q = 1 - p$ et

$$\overline{Y_m} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Y_i$$

On cherche à estimer p.

1. (a) On a

$$E\left(\overline{Y_m}\right) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E(Y_i) = \frac{mp}{m} = p$$

Donc le biais de $\overline{Y_m}$ comme estimateur de p est

$$E\left(\overline{Y_m}\right) - p = 0$$

Comme les Y_i sont indépendantes, on a

$$V\left(\overline{Y_m}\right) = V\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_i\right) = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m} V(Y_i) = \frac{mp(1-p)}{m^2} = \frac{p(1-p)}{m}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Son risque quadratique est } \dfrac{p(1-p)}{m}}$

(b) On a

$$p \in \left[\overline{Y_m} - \sqrt{\frac{5}{m}}, \overline{Y_m} + \sqrt{\frac{5}{m}}\right] \iff \left|\overline{Y_m} - p\right| \leq \sqrt{\frac{5}{m}}$$

Or

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{Y_m} - p\right| \leq \sqrt{\frac{5}{m}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\overline{Y_m} - p\right| > \sqrt{\frac{5}{m}}\right)$$

Comme $\overline{Y_m}$ admet une variance, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{Y_m} - p\right| > \sqrt{\frac{5}{m}}\right) \leq \frac{V\left(\overline{Y_m}\right)}{\sqrt{\frac{5}{m}}^2}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\overline{Y_m}-p\right|>\sqrt{\frac{5}{m}}\right)\geq 1-\frac{V\left(\overline{Y_m}\right)}{\sqrt{\frac{5}{m}}^2}=\frac{p(1-p)}{5}$$

Or $p\mapsto p\,(1-p)$ est maximale en $p=\dfrac{1}{2}$ et vaut $\dfrac{1}{4}$ en ce point donc

$$\mathbb{P}\left(p\in\left[\overline{Y_m}-\sqrt{\frac{5}{m}},\overline{Y_m}+\sqrt{\frac{5}{m}}\right]\right)\geq 1-\frac{1}{20}=0.95$$

Conclusion : $\boxed{\left[\overline{Y_m}-\sqrt{\frac{5}{m}},\overline{Y_m}+\sqrt{\frac{5}{m}}\right] \text{ est un intervalle de confiance de } p \text{ au niveau de confiance } 0.95}$

2. Soit θ un réel positif et ε un réel strictement positif quelconque.
   (a) On a

$$\left[\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon\right]=\left[\overline{Y_m}\geq\varepsilon+p\right]=\left[m\theta\overline{Y_m}\geq m\theta\left(\varepsilon+p\right)\right]=\left[e^{m\theta\overline{Y_m}}\geq e^{m\theta(p+\varepsilon)}\right]$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon\right)=\mathbb{P}\left(e^{m\theta\overline{Y_m}}\geq e^{m\theta(p+\varepsilon)}\right)}$

   (b) L'espérance est alors

$$\begin{aligned}E\left(T\right)&=\sum_{k\in T(\Omega)}k\mathbb{P}\left(T=k\right)\\&=\sum_{k\in T(\Omega):k<a}k\mathbb{P}\left(T=k\right)+\sum_{k\in T(\Omega):k\geq a}k\mathbb{P}\left(T=k\right)\end{aligned}$$

or

$$\sum_{k\in T(\Omega):k\geq a}k\mathbb{P}\left(T=k\right)\geq\sum_{k\in T(\Omega):k\geq a}a\mathbb{P}\left(T=k\right)=a\mathbb{P}\left(T\geq a\right)$$

et comme T prend des valeurs positives

$$\sum_{k\in T(\Omega):k<a}k\mathbb{P}\left(T=k\right)\geq 0$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}\left(\left[T\geq a\right]\right)\leq\frac{E\left(T\right)}{a}\text{ pour } a>0}$

   (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g\left(x\right)=\ln\left(p\ e^x+q\right)$$

De la question précédente, on en déduit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon\right)&=\mathbb{P}\left(e^{m\theta\overline{Y_m}}\geq e^{m\theta(p+\varepsilon)}\right)\\&\leq\frac{E\left(e^{m\theta\overline{Y_m}}\right)}{e^{m\theta(p+\varepsilon)}}\text{ car } e^{m\theta(p+\varepsilon)}>0\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$e^{m\theta\overline{Y_m}}=e^{\theta\sum_{k=1}^m Y_k}=\prod_{k=1}^m e^{\theta Y_k}$$

Comme les $e^{\theta Y_k}$ sont indépendants (d'après le lemme des coalitions), on obtient

$$E\left(e^{m\theta\overline{Y_m}}\right)=\prod_{k=1}^m E\left(e^{\theta Y_k}\right)$$

d'après le théorème de transfert, on a $E\left(e^{\theta Y_k}\right)=e^0q+e^\theta p=q+e^\theta p$, ainsi

$$E\left(e^{m\theta\overline{Y_m}}\right)=\prod_{k=1}^m E\left(e^{\theta Y_k}\right)=\left(q+e^\theta p\right)^m=e^{m\ln\left(q+e^\theta p\right)}=e^{m\,g(\theta)}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}\left(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon\right)\leq\frac{e^{m\,g(\theta)}}{e^{m\theta(p+\varepsilon)}}=e^{m[g(\theta)-\theta(p+\varepsilon)]}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{Y_m}-p\geq\varepsilon\right)\leq e^{m[g(\theta)-\theta(p+\varepsilon)]}}$

(d) Sur $\mathbb{R}^+$, $p\ e^x + q > 0$ donc g est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$ comme composée de fonctions C^2. Soit $x \geq 0$

$$g'(x) = \frac{1}{pe^x + q} pe^x$$

On calcule alors

$$g''(x) = p \frac{e^x (pe^x + q) - pe^x e^x}{(pe^x + q)^2} = \frac{pqe^x}{(pe^x + q)^2}$$

Puis

$$g'''(x) = pq \frac{e^x (pe^x + q) - 2pe^x e^x}{(pe^x + q)^3} = pq \frac{e^x q - pe^x e^x}{(pe^x + q)^3} = pqe^x \frac{q - pe^x}{(pe^x + q)^3}$$

Comme g''' s'annule en $\ln(q/p)$, on a

x	0		$\ln(q/p)$		$+\infty$
$q - pe^x$		$+$	0	$-$	
$g'''(x)$		$+$	0	$-$	
$g''(x)$		$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	

avec

$$g''(\ln(q/p)) = \frac{pq\frac{q}{p}}{\left(p\frac{q}{p} + q\right)^2} = \frac{p^2q^2}{(pq + qp)^2} = \frac{1}{4}$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^+,\ g''(x) \leq \frac{1}{4}}$

(e) On étudie la différence :

$$f(\theta) = g(\theta) - \theta p - \frac{\theta^2}{8}$$

f est C^2 sur $\mathbb{R}^+$. Pour $\theta \geq 0$,

$$f'(\theta) = g'(\theta) - p - \frac{\theta}{4}$$

Puis

$$f''(\theta) = g''(\theta) - \frac{1}{4} \leq 0$$

De plus, comme $g'(0) = \frac{p}{p+q} = p$ alors $f'(0) = 0$ et f' est décroissante sur donc pour $\theta \geq 0$

$$f'(\theta) \leq 0$$

Comme $f(0) = g(0) = \ln(p+q) = 0$ et f décroissante, on obtient

Conclusion : $\boxed{g(\theta) \leq \theta p + \frac{\theta^2}{8}}$

(f) Pour $x \geq 0$, on pose

$$h(x) = \frac{x^2}{8} - \varepsilon x$$

h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$h'(x) = \frac{x}{4} - \varepsilon$$

x	0		4ε		$+\infty$
$h'(x)$		$-$		$+$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-2\varepsilon^2$	$\nearrow$	$+\infty$

car

$$h(x) = \frac{x^2}{8} - \varepsilon x = x^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{\varepsilon}{x}\right) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

On met les inégalités bout à bout :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\overline{Y_m} - p \geq \varepsilon\right) &\leq e^{m[g(\theta) - \theta(p+\varepsilon)]} \\ &\leq e^{m\left[\theta p + \frac{1}{8}\theta^2 - \theta(p+\varepsilon)\right]} = e^{mh(\theta)} \end{aligned}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $\theta \geq 0$, donc en particulier pour $\theta = 4\varepsilon$ pour lequel on a $h(4\varepsilon) = -2\varepsilon^2$.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}\left(\overline{Y_m} - p \geq \varepsilon\right) \leq e^{-2m\varepsilon^2}}$