COLLE 01

EXERCICE 1 - Se ramener à une somme classique

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$. Calculer explicitement u_n , puis en déduire la limite de la suite (u_n) .

EXERCICE 2 - Irrationalité de e

Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n!u_n < n!e < n!u_n + \frac{1}{n}$.
3. En déduire que e est un nombre irrationnel (on pourra procéder par l'absurde).
4. Écrire une fonction `approx(ecart)` sous Python qui renvoie un encadrement de e avec une amplitude inférieure à `ecart`.

EXERCICE 3 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.} & u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1) \\ \mathbf{2.} & u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \\ \mathbf{3.} & u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, \quad a, b \in]0, +\infty[\\ \mathbf{4.} & u_n = \frac{\ln(n + e^n)}{n} \\ \mathbf{5.} & u_n = \frac{\ln(1 + \sqrt{n})}{\ln(1 + n^2)}. \end{array}$$

EXERCICE 4 - Exemple de suites adjacentes

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

$$\begin{array}{l} \mathbf{1.} \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n} \\ \mathbf{2.} \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \text{ et } v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}. \end{array}$$

EXERCICE 5 - Fonction croissante - avec indications

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?
2. On suppose $u_0 \in [0, 1/4]$. Montrer que $u_n \in [0, 1/4]$ pour tout n , puis que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?
3. On suppose $u_0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?
4. On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?

EXERCICE 6 - Fonction décroissante - avec indications

Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$ et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f . Que peut-on en déduire sur (u_n) ?
2. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.
3. Démontrer que (w_n) est décroissante.
4. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.
5. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

EXERCICE 7 - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes :

1. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 3$, $u_1 = 5$.
2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.
3. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

EXERCICE 8 - Croisées

Soient (x_n) et (y_n) deux suites de nombres réels définies par $0 < x_0 < y_0$ et

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n} \\ y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n} \end{cases}$$

1. Montrer que $(y_n - x_n)$ est une suite constante.
2. En déduire que (x_n) est décroissante.
3. Montrer que les deux suites sont convergentes, et calculer leur limite respective.

EXERCICE 9 - Matrices et suites

Soient (a_n) , (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n , b_n , et c_n uniquement en fonction de n .

1. On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

En déduire que $X_n = A^n X_0$.

2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2 , N^3 , puis N^p pour $p \geq 3$.

3. Montrer que :

$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$

4. En déduire a_n , b_n et c_n en fonction de n .