COLLE 02

Exercice 1 - Se ramener à une somme classique

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$. Calculer explicitement u_n, puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \ln\left(2n^2 - n\right) - \ln(3n+1)$ **2**. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n},\ a, b \in]0, +\infty[$ **4**. $u_n = \dfrac{\ln(n + e^n)}{n}$

5. $u_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$.

Exercice 3 - Exemple de suites adjacentes

Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) données ci-dessous forment des couples de suites adjacentes.

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ **2**. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

3. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

Exercice 4 -

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$, et la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrer que $g(x) = x$ admet une unique solution x_0 et que $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant x_0$.
4. Etudier la convergence de la suite.
5. Montrer que $\forall x \in [\frac{1}{2}; x_0]$, $\mid g'(x) \mid \leqslant \frac{1}{8}$.
6. Etablir, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mid u_n - x_0 \mid \leqslant \left(\frac{1}{8}\right)^{n-1} \frac{1}{2}$.

Exercice 5 - Fonction croissante - avec indications

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \frac{3}{16}$ et $u_0 \geq 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x) - x$. Quelles sont les limites possible de (u_n)?
2. On suppose $u_0 \in [0, 1/4]$. Montrer que $u_n \in [0, 1/4]$ pour tout n, puis que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?
3. On suppose $u_0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?
4. On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite)?

Exercice 6 - Fonction décroissante - avec indications

Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ définie par $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$. On considère la suite récurrente (u_n) vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 1$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[1, 3]$ et montrer que l'intervalle $[1, 3]$ est stable par f. Que peut-on en déduire sur (u_n)?

2. Soient (v_n) et (w_n) les suites définies par $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Montrer que (v_n) est croissante.

3. Démontrer que (w_n) est décroissante.

4. En déduire que (v_n) et (w_n) sont convergentes et déterminer leur limite respective.

5. Quelle est la nature de la suite (u_n)?

Exercice 7 - Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes (u_n) suivantes :

1. $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, $u_0 = 3$, $u_1 = 5$.

2. $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 0$.

3. $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$, $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

Exercice 8 - Croisées

Soient (x_n) et (y_n) deux suites de nombres réels définies par $0 < x_0 < y_0$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \dfrac{x_n^2}{x_n + y_n} \\ y_{n+1} & = & \dfrac{y_n^2}{x_n + y_n} \end{array}\right.$$

1. Montrer que $(y_n - x_n)$ est une suite constante.

2. En déduire que (x_n) est décroissante.

3. Montrer que les deux suites sont convergentes, et calculer leur limite respective.

Exercice 9

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1}.$$

2. En déduire la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}.$$

Exercice 10 -

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3 + 1}$ **2.** $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$ **3.** $u_n = n \sin(1/n)$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5.** $u_n = \dfrac{(-1)^n + n}{n^2 + 1}$ **6.** $u_n = \dfrac{1}{n!}$

7. $u_n = \dfrac{3^n + n^4}{5^n - 2^n}$