

COLLE 03

COURS :

Donner le critère de comparaison de deux série si $u_n \leq v_n$.

Critère de convergence par domination.

Critère de convergence par équivalence.

Donner la définition d'une série géométrique, dans quel cas elle converge?

Donner la définition d'une série de Riemann, dans quel cas, elle converge?

Définition d'une série absolument convergent. Quelle conséquence pour la série?

Donner la loi binomiale, son espérance et sa variance.

Donner la loi géométrique, son espérance et sa variance.

Donner la loi de Poisson, son espérance et sa variance.

EXERCICE 1

1. Quelle est la nature de la série de terme général, $u_n = \frac{1}{n^2 - 1}$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{a}{n - 1} + \frac{b}{n + 1}$.
3. En déduire la limite de la suite $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$.

EXERCICE 2 -

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

$$\begin{array}{lll} \mathbf{1.} & u_n = \frac{n}{n^3 + 1} & \mathbf{2.} & u_n = \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} & \mathbf{3.} & u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ \mathbf{4.} & u_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2 + 1} & \mathbf{5.} & u_n = \frac{1}{n!} & \mathbf{6.} & u_n = \frac{3^n + n^4}{5^n - 2^n} \end{array}$$

EXERCICE 3 - Jeu de cartes

On tire trois cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Quelle est la probabilité de

1. n'obtenir que des coeurs?
2. que des as?
3. deux coeurs et un pique?

On donnera le résultat sous forme de fraction irréductible.

EXERCICE 4 - Au moins un six!

Soit $n \geq 1$. On lance n fois un dé parfaitement équilibré. Quelle est la probabilité d'obtenir

1. au moins une fois le chiffre 6?
2. au moins deux fois le chiffre 6?

EXERCICE 5

Soit X une variable aléatoire prenant toutes les valeurs entières non nulles. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = kP(X > n)$.

Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.

EXERCICE 6

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{3}{n}P(X = n - 1)$.
Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.