COLLE 04

COURS :

Donner le critère de comparaison de deux série si $u_n \leqslant v_n$.
Critère de convergence par domination.
Critère de convergence par équivalence.
Donner la définition d'une série géométrique, dans quel cas elle converge?
Donner la définition d'une série de Riemann, dans quel cas, elle converge?
Définition d'une série absolument convergent. Quelle conséquence pour la série?
Donner la loi binomiale, son espérance et sa variance.
Donner la loi géométrique, son espérance et sa variance.
Donner la loi de Poisson, son espérance et sa variance.

Exercice 1

1. Quelle est la nature de la série de terme général, $u_n = \frac{1}{n^2-1}$.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{n^2-1} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n+1}$.
3. En déduire la limite de la suite $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

Exercice 2

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$	**2**. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$	**3**. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$	**5**. $u_n = \dfrac{1}{n!}$	**6**. $u_n = \dfrac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$
4. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}(\ln n)^2}{e^n}$	**5**. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$	**6**. $u_n = \dfrac{(\ln 5n)^2}{n^{\frac{4}{3}}}$

Exercice 3

On considère un dé truqué tel que la probabilité d'obtenir la face k soit proportionnelle à k. On suppose les faces numérotées de 1 à 6.
Soit X la variable aléatoire associée à un lancer de ce dé.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Déterminer l'espérance de X.
4. Déterminer la variance de X.
5. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y.
6. Déterminer l'espérance de Y de deux façons différentes.

Exercice 4

Un joueur joue à pile ou face avec deux pièces équilibrés : il lance simultanément les deux pièces. S'il fait

- 0 pile, il gagne 0 et le jeu s'arrête ;
- 1 pile, il relance simultanément les deux pièces, et gagne autant que le nombre de pile lors de cette série ;
- 2 piles, il relance deux fois simultanément les deux pièces, et gagne autant que le nombre de pile lors de cette série.

Déterminer la probabilité d'avoir un gain non nul.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire prenant toutes les valeurs entières non nulles. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = kP(X > n)$.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 6

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \frac{3}{n}P(X = n-1)$.
Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.