

Fiche d'exercices numéro 13

Applications linéaires et matrices

Noyaux et Images

Exercice 1 :

Reprendre les exercices de la feuille précédente en utilisant à chaque fois l'écriture matricielle de l'application linéaire dans des bases bien choisies.

Exercice 2 :

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique (notée $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$) est A . Donner l'image des vecteurs de $\mathcal{B}$ par f , puis déterminer une base de $\text{Im}(f)$.

Exercice 3 :

Pour chacune des questions suivantes, déterminer la matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ relativement aux bases canoniques de E et F et préciser dans chaque cas si f est injectif, surjectif, bijectif.

1. $f((x, y)) = (-x + y, 2x - 3y, x + 2y)$ avec $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \mathbb{R}^3$;
2. $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2, x_1 + 3x_2 - 4x_3)$ avec $E = F = \mathbb{R}^3$.
3. On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f qui à P associe $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ où $f(P)(x) = (1+2x)P(x) + (1-x^2)f'(x)$.

Isomorphismes

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{B} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{U} := (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ où $\vec{u}_1 := \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, $\vec{u}_2 := \vec{e}_1 + \vec{e}_3$ et $\vec{u}_3 := \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. f est-il un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$?
2. Montrer que $\mathcal{U}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{U}$.

Exercice 5 :

Déterminer les valeurs du réel a pour que l'endomorphisme $f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ pour que l'endomorphisme $f_a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & a-1 & 2 \\ 0 & -1 & a+1 \\ -a & 0 & -2 \end{pmatrix}$ soit bijectif.

Exercice 6 :

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, on considère les endomorphismes f et g définis par :

$$\begin{cases} f(e_1) = -2e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 \\ f(e_3) = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases} \quad \begin{cases} g(e_1) = e_1 + e_2 - 2e_3 \\ g(e_2) = e_1 + e_2 - e_3 \\ g(e_3) = e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases}.$$

1. Donner les matrices $M(f)$ et $M(g)$ des endomorphismes f et g de E dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Donner l'écriture explicite de $f(\vec{u})$ et celle de $g(\vec{u})$.
3. Montrer que f et g sont des automorphismes de E .
4. Donner les matrices de $f \circ g$ et de f^{-1} .

Endomorphisme dans un sous-espace de $\mathcal{F}(E, F)$ **Exercice 7 :**

Soit α un réel non nul et soient f_1 et f_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = e^{\alpha x}$ et $f_2(x) = xe^{\alpha x}$.

On note E le s.e.v des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ engendré par f_1 et f_2 .

Soit Δ l'application qui à toute fonction de E associe sa dérivée.

1. (a) Montrer que (f_1, f_2) est une base de E .
(b) Montrer que Δ est un endomorphisme de E . Donner la matrice de A dans la base (f_1, f_2) .
(c) L'endomorphisme Δ est-il bijectif?
2. Calculer A^{-1} . En déduire l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = (2x - 3)e^{\alpha x}$.
3. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n .
(b) En déduire la dérivée n -ième $f^{(n)}$ de la fonction f définie à la question précédente.

Un exercice plus théorique (et sans matrices !)**Exercice 8 :**

Soit E un espace vectoriel de dimension n , f un endomorphisme de E qui est *nilpotent*, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $f^k = 0$.

1. Montrer que f n'est pas bijective.
2. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$ et $x_0 \in E$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$.
(a) Montrer que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre.
(b) En déduire que $p \leq n$.