COLLE 10

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t}dt$, pour tout $x \in [1+\infty[$.

1. Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$.
2. Démontrer que f est C^1 sur $]0;+\infty[$ et donner $f'(x)$.
3. Donner le sens de variation de f.
4. Donner le développement limité de f à l'ordre 2 en 1.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\ln t}{t}dt$ sur $]0;+\infty[$.

1. Montrer que f est continue sur $]0;+\infty[$
2. Montrer que f est C^1 sur $]0;+\infty[$ et donner $f'(x)$.
3. Montrer que $\forall x \in]0;+\infty[$, $\ln(2)\ln(x) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)\ln(2x)$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)dt$ existe pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que F est croissante sur $]0;+\infty[$.

Exercice 4

Soient $\mathbf{X}$ une variable aléatoire de loi

x_i	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{P}(\mathbf{X} = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

On pose $\mathbf{Y} := \mathbf{X}^2$.

1. Donner la loi du couple $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.
2. Donner la loi marginale de $\mathbf{Y}$.
3. $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la covariance de $\mathbf{X}$ et de $\mathbf{Y}$, puis le coefficient de corrélation linéaire de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Exercice 5

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par :

$y \in Y(\Omega)$ / $x \in X(\Omega)$	0	1	2
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

a. Vérifier qu'on a bien défini une loi de couple puis déterminer les lois marginales.

b. X et Y sont-elles indépendantes ?

c. Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(XY)$.

Exercice 6

Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. On considère un couple (X, Y) dont la loi est :

$y \in Y(\Omega)$ / $x \in X(\Omega)$	t	0	1
0	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{5}$	b	$\frac{1}{10}$

a. Déterminer a et b de sorte que X et Y soient indépendantes.
Quelles seraient alors les lois conditionnelles de X pour les différentes valeurs de Y ?

b. On suppose $a = \frac{1}{5}$. Déterminer t tel que le coefficient de corrélation linéaire de X et Y soit égal à 0. X et Y sont-elles indépendantes ?