

Exercice 1 :

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X . En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2 . En déduire $Cov(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 :

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ et la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(X, p)$ où p est un réel fixé appartenant à $]0; 1[$.

1. Calculer $P_{(X=j)}(Y = i)$. On distinguera les cas $i \leq j$ et $i > j$.
2. En déduire la loi du couple (X, Y) .
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

Exercice 3 :

On considère p urnes numérotées de 1 à p contenant chacune n boules numérotées de 1 à n . On extrait une boule de chaque urne et on note X_i le numéro de la boule tirée de l'urne numérotée i .

On pose $Y = \max(X_1, X_2, \dots, X_p)$.

1. Déterminer la loi de X_i et calculer, pour tout entier k de $[[1, n]]$, $P(X_i \leq k)$.
2. Calculer, pour tout entier k de $[[1, n]]$, $P(Y \leq k)$. En déduire la loi de Y .
3. Montrer que $E(Y) = n - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$. Simplifier cette expression dans le cas où $p = 2$.

Exercice 4 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 4A$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. (a) En déduire la seule valeur propre de A .
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Exercice 5 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A - 2I_3)(A - 5I_3)$ puis déterminer un polynôme annulateur de A .
2. (a) En déduire les seules valeurs propres de A .
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Exercice 6 :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A .
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Est-elle inversible ?