Exercice 1 :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2-4A puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. (a) En déduire la seule valeur propre de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Exercice 2 :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A-2I_3)(A-5I_3)$ puis déterminer un polynôme annulateur de A.
2. (a) En déduire les seules valeurs propres de A.
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?

Exercice 3 :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Est-elle inversible ?

Exercice 4 :

Prouver la convergence et calculer le cas échéant la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}dx.$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+3)^2}dx.$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t\ln^2(t)}$

Exercice 5 :

1. Montrer que l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1}dt$ converge.
2. Trouver trois réels a, b et c tels que $\forall t \geqslant 0$, $\dfrac{t-1}{t^2+1}=\dfrac{at+b}{t^2-t+1}+\dfrac{c}{1+t}$ et en déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 6 :

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$ converge.
2. déterminer deux réels a et b tels que $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$ et en déduire la valeur de l'intégrale.

Exercice 7 :

1. Prouver la convergence et calculer la valeur de intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt.$$

2. même question pour l'intégrale :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt$$