

Exercice 1 :

Prouver la convergence et calculer le cas échéant la valeur de chacune des intégrales suivantes :

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}} dx.$
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+3)^2} dx.$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t \ln^2(t)}$

Exercice 2 :

1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{t-1}{t^3+1} dt$ converge.
2. Trouver trois réels a, b et c tels que $\forall t \geq 0, \frac{t-1}{t^2+1} = \frac{at+b}{t^2-t+1} + \frac{c}{1+t}$ et en déduire la valeur de l'intégrale I .

Exercice 3 :

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$ converge.
2. déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$ et en déduire la valeur de l'intégrale.

Exercice 4 :

1. Prouver la convergence et calculer la valeur de intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^3} dt.$$

2. même question pour l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} dt$$

Exercice 5 :

On désigne par λ , un réel strictement positif et on considère la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, par :

$$f : x \mapsto \lambda |x| e^{-\lambda x^2}$$

1. Montrer que f est paire.
2. Etablir que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge et donner sa valeur.
3. Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité de probabilité d'une variable aléatoire X .

Exercice 6 :

La fonction de répartition d'une v.a. continue X est donnée par

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < x_0 \\ 1 - \frac{k}{x^\alpha} & \text{si } x \geq x_0 \end{cases}$$

où α et x_0 sont des réels strictement positifs fixés.

1. Déterminer k en fonction de x_0 et α .
2. Déterminer une densité de X

Exercice 7 :

Soit X de densité donnée par $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est bien une densité de probabilité.
2. Déterminer $P(X \leq 2)$ et $P(2 \leq X \leq 3)$.
3. Déterminer $P(X > 3)$ puis $P_{(X>3)}(X > 5)$. Qu'observe-t-on ?

Exercice 8 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 9\frac{\ln(x)}{x^4} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} dx$ converge et donner sa valeur en fonction de n .
2. Montrer que f est une densité.
3. On considère une variable aléatoire X de densité f . Montrer que X possède une espérance et donner sa valeur.