

COLLE 16

EXERCICE 1 - Carré de la loi uniforme

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$, avec $0 < a < b$. Donner la fonction de répartition, la densité, l'espérance et la variance de $Y = X^2$.

EXERCICE 2 - Minimum de deux lois exponentielles

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi exponentielle de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 . On pose $Y = \min(X_1, X_2)$.

1. Pour tout réel y , calculer $\mathbb{P}(Y > y)$. En déduire que Y suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.
2. Deux guichets sont ouverts à une banque. Le temps de service au premier guichet (resp. au deuxième) suit une loi exponentielle de moyenne 20 min (resp. 30 min). Deux clients rentrent simultanément, l'un choisit le guichet 1 et l'autre le guichet 2. En moyenne, après combien de temps sort le premier?
3. En moyenne, après combien de temps sort le dernier?

EXERCICE 3 - Étude d'une densité et d'une fonction de variable aléatoire

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ si $x < 0$ et 0 sinon.

1. Montrer que f est une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire, que l'on notera X .
2. Déterminer la fonction de répartition de X .
3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = 2X + 1$.
 - (a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - (b) Démontrer que Y est une variable aléatoire à densité, et déterminer la densité de Y .
 - (c) Reprendre les mêmes questions avec $Y = X^2$.

EXERCICE 4 - D'après Edhec

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}$.

1. Démontrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X . On note F sa fonction de répartition (qu'on ne demande pas de calculer).
2. On considère la variable aléatoire $Y = \ln(1 + |X|)$ et on note G sa fonction de répartition. Exprimer G en fonction de F .
3. En déduire que Y admet une densité que l'on calculera.
4. Reconnaître la loi de Y .

EXERCICE 5

On considère la variable aléatoire X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Rappeler la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ et en déduire que :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

2. Montrer, grâce à une intégration par parties, que :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+, \int_0^A x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -A^3 e^{-\frac{A^2}{2}} + 3 \int_0^A x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

3. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ converge et vaut $\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$.

4. Établir que X possède un moment d'ordre 4 et que $\mathbb{E}(X^4) = 3$.

EXERCICE 5

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

1. Déterminer la loi de $Y = X^2$.
2. Calculer l'espérance de Y et sa variance, si elles existent.