

COLLE 17

EXERCICE 1

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = y^2 - x^2 + \frac{x^4}{2}$
2. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
3. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 10$

EXERCICE 2

Déterminer les extrema locaux de la fonction suivante : $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4(x - y)^2$.

EXERCICE 3

Première partie: On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $g(x) = \ln(x) + 2x + 1$

1. Etudier les variations de g (limites comprises)
2. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, e^{-1}[$ tel que $g(\alpha) = 0$

Deuxième partie: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par

$$f(x, y) = x(\ln(x) + x + y^2)$$

1. Déterminer le seul point critique de f .
2. Etudier la nature de ce point critique.
3. Montrer qu'en ce point, f vaut $-\alpha(\alpha + 1)$.

EXERCICE 4

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4x - 3y + 4xy + 3$ et $\mathcal{U}$ le fermé défini par $\mathcal{U} = \{(x, y) \text{ tels que } x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

1. Montrer que f admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{U}$.
2. On considère l'ouvert $\Omega = \{(x, y) \text{ tels que } x > 0, y > 0, x + y < 1\}$. Déterminer l'extrema de f sur cet ouvert.

EXERCICE 5

Justifier la convergence des séries suivantes et calculer la somme.

1. $A = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k}$
2. $B = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n}$
3. $C = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$