COLLE 19

EXERCICE 1

Soit X une VAR d'espérance m et une variance v.
On dispose d'un n-échantillon $(X_1; \dots; X_n)$ de X.
On appelle variance empirique de X la variable $W_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X_n}^2$, où $\overline{X_n}$ est la moyenne empirique de X.

1. Calculer $E[\overline{X_n}]$ et $V[\overline{X_n}]$ et en déduire $E[\overline{X_n}^2]$.
2. Calculer $E[W_n]$ et en déduire un estimateur sans biais de v.

EXERCICE 2

Soit X une v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0; a]$, où $a > 0$ est un paramètre inconnu. On considère un n-échantillon $(X_1; X_2; \dots; X_n)$ de la v.a.r. X.
On considère les estimateurs suivants :
$T_n = 2X_n$; $T'_n = max(X_1; X_2; \dots; X_n)$ et $T''_n = \frac{n+1}{n} T'_n$.

où $X_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ est la moyenne empirique du n-échantillon.

1. (a) Montrer que T_n est un estimateur sans biais de a.
   (b) Déterminer le risque quadratique de T_n.
   (c) T_n est-il un estimateur convergent de a ?
2. (a) Déterminer les biais et risque quadratique de T'_n.
   (b) Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $r_a(T'_n)$.
3. Mêmes questions pour T''_n. Quel est le meilleur des trois estimateurs ?

EXERCICE 3

Lors d'un sondage sur 100 personnes interrogées, 60 pensent voter pour A.
On modélise ce résultat par un échantillon $(X_1, X_2, \cdots, X_{100})$ de variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.
On cherche à déterminer un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance 99%.

1. Déterminer l'espérance et la variance de la moyenne empirique $F = \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=1}^{100} X_i$.
2. On note F^* la variable centrée réduite associée à F. Par quelle loi peut-on approcher celle de F^*? Déterminer t tel que $P(-t \leqslant F^* \leqslant t) \geqslant 0.99$ et en déduite que
$$P\left(F - t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10} \leqslant p \leqslant F + t\frac{\sqrt{p(1-p)}}{10}\right) \geqslant 0.99$$
3. Montrer que pour tout $p \in [0, 1]$, $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$ et en déduire un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance de 0.99, puis en donner une estimation.

Exercice 4

La durée de vie d'une lampe est une v.a.r. qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{m}$ inconnu. On cherche à estimer la durée de vie moyenne m de la lampe.
On prélève un échantillon de n lampes et on note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ leurs durées de vie.
On pose $X_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. (a) Montrer que X_n est un estimateur sans biais de m.
   (b) Calculer son risque quadratique.
2. On pose $Y_n = min(X_1; \ldots; X_n)$.
   (a) Déterminer la loi de Yn.
   (b) En déduire que $Z_n = nY_n$ est un estimateur sans biais de m.
   (c) Calculer son risque quadratique.
3. Comparer les deux estimateurs.