COLLE 20

Exercice 1 :

Soit $E = \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On note I_3 la matrice identité de E et 0_3 la matrice nulle de E.
Soit $\mathscr{A}$ l'ensemble des matrices M de E vérifiant l'égalite :

$$M\left(M+I_3\right)\left(M+2I_3\right) = 0_3 \qquad (*)$$

Exemples de matrices appartenant à $\mathscr{A}$.

1. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\alpha I_3 \in \mathscr{A}$.
2. L'ensemble $\mathscr{A}$ est-il sous-espace vectoriel de E ?
3. On note $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2.
   (b) En déduire deux valeurs propres de B.
   Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
   (c) Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que : $B = PDP^{-1}$.
   (d) Démontrer que $D \in \mathscr{A}$, puis que $B \in \mathscr{A}$.
4. Plus généralement, on suppose que M est une matrice de E diagonalisable, telle que le spectre de M soit inclus dans $\{0, -1, -2\}$.
   Montrer que $M \in \mathscr{A}$.

Exercice 2 :

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose, si ces intégrales convergent :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t, \quad J_n = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad K_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

1. (a) Démontrer que : $\frac{\ln(t)}{1+t^n} \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$.
   (b) Démontrer que : $\forall y \in]0,1]$, $\displaystyle\int_y^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1 + y - y\ln(y)$.
   En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge et déterminer sa valeur.
   (c) Démontrer que l'intégrale définissant J_n converge.
2. (a) Calculer $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\left(t^{3/2}\frac{\ln(t)}{1+t^n}\right)$.
   (b) En déduire la nature de l'intégrale définissant K_n.
3. Quelle est la nature de l'intégrale définissant I_n ?