Mathématiques spé 2010/2011-chapitre 5 : Diagonalisation (MP)
Diagonalisation en dimension finie (PC, PSI).

1-EXEMPLE PRELIMINAIRE.

On désire trouver toutes les suites complexes (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant
$u_0=v_0=w_0=1$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2\,v_n - 2\,w_n \\ w_{n+1} &= -2\,u_n - 2\,v_n + w_n \end{cases}$$

On définit $X_n=\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Le problème peut s'écrire : $\forall n\in\mathbb{N}$ $X_{n+1}=AX_n$ qui implique $\forall n\in\mathbb{N}$ $X_n=A^nX_0$.
On doit donc calculer A^n en fonction de n. On peut calculer A^2, A^3, $\cdots$, puis essayer de deviner la forme générale et montrer le résultat par récurrence.

$$\texttt{mA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

```
{mA.mA // MatrixForm, mA.mA.mA // MatrixForm, mA.mA.mA.mA // MatrixForm}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 7 & 8 & -5 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & -8 & 5 \\ 25 & 26 & -14 \\ -18 & -18 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -25 & -26 & 14 \\ 79 & 80 & -41 \\ -54 & -54 & 27 \end{pmatrix}\right\}$$

Ce n'est pas évident ! Si A était une matrice diagonale, le problème serait plus simple.

$$\texttt{mA} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

```
{mA.mA // MatrixForm, mA.mA.mA // MatrixForm, mA.mA.mA.mA // MatrixForm}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}\right\}$$

2-DIAGONALISATION D'UNE MATRICE CARREE.

2-1-Comment poser le problème ?

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans **R** ou **C**.
On peut considérer que A représente un endomorphisme U de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$.

Définition
Diagonaliser A , c' est trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que D=P^{-1}.A.P

D représentera alors l'endomorphisme U dans une autre base de $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$ et P sera matrice de passage entre la base canonique et cette base. D et A seront des matrices semblables.

■ **Cela est-il toujours possible ?**

Le but de la partie 2 est de répondre à cette question.
On utilisera dans la suite les conventions de notation suivantes :
. E désigne $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{C}^n$, K désigne **R** ou **C** ; E est donc un K-espace vectoriel
. si x=$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un vecteur de E on notera X sa matrice de coordonnées relativement à la base canonique, c'est à dire que X = $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

2-2-Eléments propres d'une matrice (ou d'un endomorphisme).

Définition
Un vecteur x de E est appelé vecteur propre de A lorsque
. x n'est pas le vecteur nul
. $\exists \lambda \in K \quad AX=\lambda X$

Définition
Un scalaire λ de K est appelé valeur propre de A lorsque
$\exists x \in E - \{0_E\} \quad AX=\lambda X$

A étant canoniquement associée à l'endomorphisme U, on peut énoncer ces définitions de manière équivalente :

Définition
Un vecteur x de E est appelé vecteur propre de U lorsque
. x n'est pas le vecteur nul
. $\exists \lambda \in K \quad U(x)=\lambda x$

Définition
Un scalaire λ de K est appelé valeur propre de A lorsque
$\exists x \in E - \{0_E\} \qquad U(x)=\lambda x$

On voit que vecteur propre et valeur propre ne peuvent se définir que conjointement, mais il ne s'agit pas d'une correspondance biunivoque : un vecteur propre est associé à une valeur propre unique alors qu'une valeur propre est associée à une infinité de vecteurs propres.
On peut aussi remarquer qu'un vecteur propre n'est jamais nul ; rien n'interdit en revanche au scalaire 0 d'être valeur propre.

Définition et propriété
Soit λ une valeur propre de A .
On appelle sous-espace propre associé à λ l' ensemble
$\mathcal{V}(\lambda)=\{x \in E \mid AX=\lambda X\}=\{x \in E \mid U(x)=\lambda x\}$

$\mathcal{V}(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de E.

$\mathcal{V}(\lambda)$ n'est pas exactement l'ensemble de tous les vecteurs propres de A associés à λ, il contient, en plus, le vecteur nul. $\mathcal{V}(\lambda)$ est forcément de dimension supérieure ou égale à 1.

■ Pourquoi s'intéresser aux éléments propres de A ?

Si le vecteur propre x est le $i^{\text{ème}}$ vecteur d'une base de E, la matrice de U relativement à cette base sera de la forme

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{c} i^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \bullet & \cdots & \bullet & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & \vdots & & & \\ \bullet & \cdots & \bullet & 0 & \bullet & \cdots & \bullet \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Si on peut trouver suffisamment de vecteurs propres de A pour former une base de E (c'est à dire n vecteurs propres de A formant une famille libre), la matrice de U relativement à cette base sera de forme diagonale et c'est exactement ce que l'on cherche.

■ Diagonaliser A, c'est trouver une base de E formée de vecteurs propres de A.

On a déjà remarqué qu'un vecteur propre ne pouvait être associé qu'à une seule valeur propre ; plus généralement :

Propriété
Des vecteurs propres associés à des valeurs propres toutes distinctes forment une famille libre de E.

Démonstration : elle se fait par récurrence sur le nombre de vecteurs dans la famille et sera détaillée dans le paragraphe 5-4 (MP).

2-3-Comment trouver les éventuelles valeurs propres d'une matrice ?

λ est une valeur propre de A si et seulement si il existe un vecteur x non nul tel que AX=λX c'est à dire $(A-\lambda I_n)X=\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui veut dire que le vecteur non nul x est une solution du système linéaire homogène associé à la matrice $A-\lambda I_n$.
Or, il est évident que tout système linéaire homogène admet le vecteur nul pour solution ; on peut donc affirmer que λ est une valeur propre de A si et seulement si le système linéaire homogène associé à la matrice $A-\lambda I_n$ admet au moins 2 solutions.
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système linéaire associé à une matrice carrée possède une unique solution est que le déterminant de la matrice soit non nul. On peut donc énoncer :

Propriété
Le scalaire λ est valeur propre de la matrice A
si et seulement si dét$(A-\lambda I_n) = 0$

2-4-Polynôme caractéristique d'une matrice.

Définition
On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme χ_A défini par
$\chi_A(\lambda)$=dét$(A-\lambda I_n)$

Les valeurs propres de A sont donc les racines du polynôme caractéristique.
Exemples :

$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_{A_1}(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-3)$

$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_{A_2}(\lambda)=-(\lambda-1)^3$

$A_3=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \chi_{A_3}(\lambda)=\lambda^2+1$

Propriété 1
χ_A est de degré n et
$\chi_A(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1}+\dots+\mathrm{dét}(A)$

Démonstration :
Il est évident que le terme constant est $\chi_A(0)$=dét(A) ; le reste de la démonstration se fait par récurrence sur n.
Posons $\mathcal{P}(n)$: "χ_A est de degré n et $\chi_A(\lambda)=(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)\lambda^{n-1}+\dots$"

- Si n=2, $\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a_{1,1}+a_{2,2})\lambda+a_{1,1}a_{2,2}-a_{2,1}a_{2,1}$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit A d'ordre n+1.

$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & \cdots & a_{n+1,n+1}-\lambda \end{vmatrix}$; on développe par rapport à la dernière ligne ;

$$\chi_A(\lambda)=(-1)^{n+2}a_{n+1,1}\begin{vmatrix} a_{1,2} & \cdots & & a_{1,n+1} \\ a_{2,2}-\lambda & & & a_{2,n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}-\lambda & a_{n,n+1} \end{vmatrix}+\dots+(-1)^{2n+1}a_{n+1,n}\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & \cdots & & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & & & a_{2,n+1} \\ \vdots & & a_{n-1,n-1}-\lambda & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n+1} \end{vmatrix}+(-1)^{2n+2}(a_{n+1,n+1}-\lambda)\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}$$

Les termes en λ^n et en λ^{n+1} apparaissent uniquement dans $(-1)^{2n+2}(a_{n+1,n+1}-\lambda)\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix}$ et,d'après l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$, ceci est égal à
$(a_{n+1,n+1}-\lambda)[(-1)^n\lambda^n+(-1)^{n-1}(a_{1,1}+\dots+a_{n,n})\lambda^{n-1}+\dots]=(-1)^{n+1}\lambda^{n+1}+(-1)^n(a_{1,1}+\dots+a_{n,n}+a_{n+1,n+1})\lambda^n+\dots$
$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Propriété 2
Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Démonstration :
Si A et B sont liées par une relation du type B=P^{-1}AP, $\chi_B(\lambda)$=dét(P^{-1}AP-λI_n)=dét(P^{-1}(A-λI_n) P)=dét(P^{-1})$\chi_A(\lambda)$dét(P)=$\chi_A(\lambda)$.
(les propriétés utilisées ici sur les déterminants seront rappelées dans le paragraphe 3)

Remarque :
Deux matrices semblables représentant le même endomorphisme relativement à des bases différentes, valeurs et vacteurs propres sont donc bien associés à un endomorphisme et non à sa représentation matricielle dans une base donnée (cf les définitions du 2-2).

Stratégie :
. on calcule d'abord le polynôme caractéristique de A
. on le factorise et on détermine ses racines qui sont les valeurs propres de A
. pour chaque valeur propre, on détermine le sous-espace propre associé, ce qui se fait par résolution d'un système linéaire.

Suite des exemples :

$A_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; les valeurs propres sont -1 et 3 ;

$\mathcal{V}(-1)$=Vect((1,-2)) , $\mathcal{V}(3)$=Vect((1,2)) ;
on peut diagonaliser A en prenant comme nouvelle base ((1,-2),(1,2)).

$A_2=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; la seule valeur propre est 1 ;

$\mathcal{V}(1)$=Vect((1,0,0)) ;
on ne peut pas diagonaliser A

$A_3=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

- si K=$\mathbb{R}$ il n'y a ni valeurs propres ni vecteurs propres et on ne peut pas diagonaliser A
- si K=$\mathbb{C}$ les valeurs propres sont i et $-i$,

$\mathcal{V}(i)$ = Vect((i,1)) , $\mathcal{V}(-i)$=Vect((1,i)) ,
on peut diagonaliser A en prenant comme nouvelle base ((i,1),(1,i)).

D'un point de vue pratique, remarquons deux choses:
- pour déterminer d'éventuelles valeurs propres d'une matrice, il est nécessaire de savoir calculer un déterminant et même de savoir en donner une forme factorisée ; ceci fera l'objet de la partie 3
- il faut être attentif à l'environnement du problème posé ; la réponse à la question "A a-t-elle des valeurs propres ?" va, dans le cas du troisième exemple, différer selon que A est considérée comme matrice réelle ou comme matrice complexe.

2-5-Ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Définition
Soient $\lambda_0 \in$ K et p$\in\mathbb{N}^*$
On dit que λ_0 est valeur propre d'ordre p de *A* lorsque λ_0 est une racine d'ordre p de χ_A c'est-à-dire lorsqu'il existe un polynôme *Q* tel que
$\chi_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^p\, Q(\lambda)$ **et** $Q(\lambda_0) \neq 0$

L'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_0 est généralement noté m(λ_0) ; il est clair que $1 \leq m(\lambda_0) \leq n$

Propriété
Si λ_0 est une valeur propre de *A*, alors
$1 \leq \dim(\mathcal{V}(\lambda_0)) \leq m(\lambda_0)$

Démonstration : $1 \leq \dim(\mathcal{V}(\lambda_0))$ est évident.
On appelle q la dimension de $\mathcal{V}(\lambda_0)$, on choisit une base de $\mathcal{V}(\lambda_0)$ et on utilise le théorème de la base incomplète pour obtenir une base de E. La matrice B de U relativement à cette base est semblable à A et possède un bloc de zéros d'ordre n-q en bas à gauche. On a donc $\chi_A=\chi_B$ et $(\lambda - \lambda_0)^q$ est en facteur dans $\chi_B(\lambda)$ ce qui implique que m(λ_0)$\geq$q.

<u>Suite des exemples</u> :
-1 et 3 sont valeurs propres simples de A_1 ; évidemment, dim($\mathcal{V}$(-1))=dim($\mathcal{V}$(3))=1.
1 est valeur propre triple de A_2 et dim($\mathcal{V}$(1))=1.
Dans le cas où K=ℂ, i et $-i$ sont valeurs propres simples de A_3 ; évidemment, dim($\mathcal{V}(-i)$)=dim($\mathcal{V}(i)$)=1.

2-6-Conditions de diagonalisabilité.

Le théorème suivant, appelé théorème de d'Alembert, et qui sera admis, permet de préciser des conditions de diagonalisabilité.

Théorème
Tout polynôme de degré n à coefficients complexes admet exactement n racines complexes (distinctes ou confondues).

La convention utilisée est que chaque racine compte autant de fois que son ordre de multiplicité (une racine double compte pour deux racines, etc). Le polynôme χ_{A_2} des exemples possède ainsi 3 racines, toutes égales à 1.
Attention, le théorème ne s'applique pas dans le cas réel : chacun sait qu'un polynôme de degré 2 à coefficients réels et à discriminant strictement négatif n'a aucune racine réelle, c'est d'ailleurs le cas du polynôme χ_{A_3} des exemples.

Propriété (CNS de diagonalisabilité)
Il y a équivalence entre les trois propositions suivantes.
(1) A est diagonalisable
(2) la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n
(3) χ_A possède dans K n racines distinctes ou confondues et pour chaque racine λ, on a dim($\mathcal{V}(\lambda)$)=m(λ).

<u>Démonstration</u> :
(3)⟹(2) est évident
(2)⟹(1) Appelons ⇒$\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A et pour tout i n_i=dim($\mathcal{V}(\lambda_i)$) ; par hypothèse, $n_1+ \dots +n_p$= n
Soient $(x_{1,1}, \dots ,x_{1,n_1})$ une base de $\mathcal{V}(\lambda_1)$

⋮

$(x_{p,1}, \dots ,x_{p,n_p})$ une base de $\mathcal{V}(\lambda_p)$

$(x_{1,1}, \dots ,x_{1,n_1}, \dots ,x_{p,1}, \dots ,x_{p,n_p})$ est une famille de n vecteurs de E ; montrons qu'elle est libre.
Supposons pour cela que
$\alpha_{1,1}\, x_{1,1}+ \dots +\alpha_{1,n_1} x_{1,n_1}+ \dots +\alpha_{p,1} x_{p,1}+ \dots +\alpha_{p,n_p} x_{p,n_p}=0_E$
$\alpha_{1,1}\, x_{1,1}+ \dots +\alpha_{1,n_1} x_{1,n_1}$ est un vecteur de $\mathcal{V}(\lambda_1)$, ... ,$\alpha_{p,1} x_{p,1}+ \dots +\alpha_{p,n_p} x_{p,n_p}$ est un vecteur de $\mathcal{V}(\lambda_p)$, donc d'après la propriété du 2-2,

$$\begin{cases} \alpha_{1,1}\, x_{1,1} + \cdots + \alpha_{1,n_1}\, x_{1,n_1} & = & 0_E \\ \qquad \vdots & & \vdots \\ \alpha_{p,1}\, x_{p,1} + \cdots + \alpha_{p,n_p}\, x_{p,n_p} & = & 0_E \end{cases}$$

On en déduit que tous les $\alpha_{i,j}$ sont nuls.
(1)⟹(3) Par contraposition, si (3) est fausse, alors une famille libre de vecteurs propres de A ne peut contenir qu'un nombre de vecteurs strictement inférieur à n.

De cette propriété, on peut déduire deux corollaires.

Corollaire 1 (CN de diagonalisabilité)
Dans le cas où K=ℝ , pour que A soit diagonalisable, il est nécessaire que χ_A possède dans ℝ n racines (distinctes ou confondues).

Cette condition n'est pas suffisante ; A_2 n'est pas diagonalisable bien que χ_{A_2} possède, dans ℝ, 3 racines confondues.

Corollaire 2 (CS de diagonalisabilité)
Pour que A soit diagonalisable, il suffit que χ_A possède dans K n racines distinctes.

Cette condition n'est pas nécessaire :

$A_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\chi_{A_4}(\lambda)=-(\lambda+1)(\lambda-1)^2$

$\mathcal{V}(-1)$=Vect((1,1,-2)) $\mathcal{V}(1)$=Vect((1,0,0),(0,1,0))

A_4 est donc diagonalisable bien que χ_{A_4} ne possède que 2 racines distinctes.

Remarque :
La CNS de diagonalisabilité permet de constater que, lorsque A est diagonalisable, $\chi_A(\lambda)=(-1)^n(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$ où les λ_i sont les valeurs propres de A. Grâce à la propriété 1 du 2-4, on voit que la somme des valeurs propres de A (chacune comptant autant de fois que son ordre de multiplicité) est égale à la trace de A.

2-7-Diagonalisation des matrices symétriques.

On rappelle qu'une matrice réelle est dite
. symétrique lorsqu'elle vérifie ${}^tA$ = A
. orthogonale lorsqu'elle vérifie ${}^tA = A^{-1}$
Une matrice A est orthogonale si et seulement si ses vecteurs-colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

On démontrera au chapitre 9 la propriété suivante.

Propriété
Toute matrice symétrique est diagonalisable et même orthodiagonalisable.

Cela veut dire que le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique A ne possède pas de racines imaginaires et qu'il existe dans $\mathbb{R}^n$ une base orthonormée constituée de vecteurs propres de A. On peut aussi dire qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P vérifiant A = P . D . ${}^tP$ = P . D . P^{-1}.

2-8-*Mathematica* et la diagonalisation des matrices carrées.

Eigenvalues[mA], Eigenvectors[mA] et Eigensystem[mA] retournent respectivement les valeurs propres, des vecteurs propres et une liste contenant les valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice mA.

```
mA1 = (1 1
       4 1);
Eigenvalues[mA1]
Eigenvectors[mA1]
Eigensystem[mA1]
```

```
{3, -1}
```

```
{{1, 2}, {-1, 2}}
```

```
{{3, -1}, {{1, 2}, {-1, 2}}}
```

```
mA2 = (1 2 1
       0 1 1
       0 0 1); mA3 = (0 -1
                      1  0);
Eigensystem[mA2]
Eigensystem[mA3]
```

```
{{1, 1, 1}, {{1, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}}
```

```
{{i, -i}, {{i, 1}, {-i, 1}}}
```

<u>Remarques</u> :

- *Mathematica* calcule à priori dans $\mathbb{C}$, comme le montre l'exemple de A_3.
- Dans le cas de A_2, *Mathematica* donne

. 3 fois le 1 dans la liste des valeurs propres : il faut comprendre que 1 est valeur propre triple

. le vecteur nul (2 fois) dans la liste des vecteurs propres alors que le vecteur nul ne peut pas être vecteur propre : il faut comprendre que $\mathcal{V}(1)$ est de dimension 1 et que (1,0,0) en est une base

CharacteristicPolynomial[mA,λ] donne le polynôme caractéristique de la matrice mA en notant λ sa variable.

```
mA4 = (1 0  1
       0 1  1
       0 0 -1);
khi = CharacteristicPolynomial[mA4, λ]
```

$$-1 + \lambda + \lambda^2 - \lambda^3$$

<u>Remarque</u> : il est peu utile sous cette forme car non factorisé.

```
Factor[khi]
```

$$-(-1+\lambda)^2\,(1+\lambda)$$

3-LE CALCUL DE DETERMINANTS.

3-1-Déterminant d'une matrice, développement selon une colonne ou une ligne.

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et A=$(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ est une matrice carrée d' ordre n à coefficients dans **R** ou **C**.

Le déterminant de A est un scalaire (élément de K) noté dét(A)

Si A=$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$, dét(A) se note aussi $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Définition

Si n=2 **dét(A)=$a_{1,1}a_{2,2}$-$a_{1,2}a_{2,1}$**

Si n>2 **pour tout i∈⟦1,n⟧** **dét(A)= $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}$dét$(A_{i,j})$**

où $A_{i,j}$ est la matrice d'ordre n-1 obtenue en barrant dans A la ligne i et la colonne j.

Les $(-1)^{i+j}$dét$(A_{i,j})$ sont appelés cofacteurs de A.

La formule dét(A)= $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}$dét$(A_{i,j})$ est appelée développement selon la $i^{\text{ème}}$ ligne de A ; on peut montrer que le résultat obtenu pour dét(A) ne dépend pas du i choisi.

On montre également que dét(A) s'obtient par une formule analogue mais permutant les rôles des lignes et des colonnes ; c'est le développement selon la $j^{\text{ième}}$ colonne de A : pour tout j∈⟦1,n⟧ dét(A)= $\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}$dét$(A_{i,j})$

Ces formules permettent, par exemple, de calculer un déterminant d'ordre 3 à l'aide de 3 déterminants d'ordre 2 ou un déterminant d'ordre 4 à l'aide de 4 déterminants d'ordre 3 soit 12 déterminant d'ordre 2. Evidemment, le nombre de calculs à effectuer va rendre cette méthode inopérante dès que l'ordre du déterminant augmente, d'où l'intérêt de trouver un autre mode de calcul (paragraphe 3-3).

Par convention, dans le cas où n=1 $|a_{1,1}|=a_{1,1}$; ceci permet d'utiliser les formules de développement à partir de n=2.

3-2-Déterminant d'un produit, d'un inverse, d'une transposée.

Produit :

Propriété 1

Si A et B sont deux matrices d'ordre n

dét (AB) = dét (A)dét (B)

Inverse :

Propriété 2
Si A est une matrice d'ordre n
. A est inversible si et seulement si dét (A) $\neq 0$
- lorsque A est inversible dét(A^{-1})=$\frac{1}{\text{dét}(A)}$

Transposée :

Propriété 3
Si A est une matrice d'ordre n
dét(^tA)=dét(A)

Cette dernière propriété justifie que lignes et colonnes jouent des rôles similaires pour le calcul du déterminant.

3-3-Transformation de lignes ou de colonnes.

On a vu au 3-1 que le calcul d'un déterminant d'ordre élevé pouvait être long ; on remarque que si une ligne ou une colonne contient un grand nombre de zéros, la formule de développement (selon cette ligne ou cette colonne) se simplifie.

- **Stratégie : transformer le déterminant à calculer en un déterminant qui lui est égal mais possède une ligne (ou une colonne) ayant un grand nombre de zéros, puis développer selon cette ligne (ou colonne).**

Règle de transformation :

Propriété
Si dans le calcule de dét (A) on remplace la colonne C_j par la combinaison $\alpha_1 C_1+\alpha_2 C_2+ \ldots +\alpha_n C_n$, on multiplie dét(A) par α_j

Cette règle permet de faire apparaitre des zéros sur une ligne du déterminant en effectuant des combinaisons linéaires de colonnes. Il ne faut pas oublier la division par α_j pour rétablir la valeur du déterminant initial.
<u>Attention</u> : le coefficient α_j ne doit JAMAIS être NUL.

<u>Exemple</u> : Calcul de d=$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Effectuons les transformations $C_2 \longleftarrow 3C_2+2C_1$ puis $C_3 \longleftarrow 3C_3-2C_1$

$$d=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 3 & 12 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 12 & -9 \\ -2 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Développons finalement par rapport à la première ligne :

$$d=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 12 & -9 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}=25$$

Compte tenu de la propriété 3 du 3-2, il est possible de remplacer les colonnes par les lignes dans la règle de transformation.

3-4-Déterminant d'un endomorphisme.

Si deux matrices A et B représentent le même endomorphisme U de E relativement à deux bases différentes, A et B sont liées par une relation du type B=P^{-1}AP. Les propriétés 1 et 2 du paragraphe 3-2 prouvent alors que dét(A)=dét(B). Le déterminant est donc attaché à l'endomorphisme et non à sa matrice relativement à une base.

Définition

Si U est un endomorphisme de E, on appelle déterminant de U le déterminant de sa matrice relativement à une base quelconque de E.

On note dét(U) le déterminant de U ; il est nul si et seulement si U est non bijectif.

3-5-*Mathematica* et le calcul des déterminants.

Det[mA] retourne le déterminant de la matrice mA.

$$\text{Det}\left[\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

```
25
```

4-APPLICATIONS DE LA DIAGONALISATION.

4-1-Puissances d'une matrice.

<u>Problème</u> :

On donne une matrice carrée A, on désire calculer A^n pour tout entier naturel n non nul.

<u>Méthode</u> :

On diagonalise A : A=PDP^{-1}.

Pour tout n∈ℕ* on a alors A^n=PDP^{-1}.PDP^{-1}.···.PDP^{-1}=P$D^n$$P^{-1}$

<u>Exemple</u> : A=$\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; calculer A^n.

$$\text{mA} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

```
eltP = Eigensystem[mA]
```

```
{{9, 3, 3}, {{-2, -1, 1}, {1, 0, 2}, {-1, 2, 0}}}
```

```
mD = DiagonalMatrix[eltP[[1]]];
mP = Transpose[eltP[[2]]];
mP.mD.Inverse[mP] == mA
```

```
True
```

```
mDn = DiagonalMatrix[{9^n, 3^n, 3^n}];
mAn = mP.mDn.Inverse[mP];
mAn // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 3^{-1+n} + 2 \times 3^{-1+2n} & -3^{-1+n} + 3^{-1+2n} & 3^{-1+n} - 3^{-1+2n} \\ -3^{-1+n} + 3^{-1+2n} & \frac{5\, 3^{-1+n}}{2} + \frac{1}{2} 3^{-1+2n} & \frac{3^{-1+n}}{2} - \frac{1}{2} 3^{-1+2n} \\ 3^{-1+n} - 3^{-1+2n} & \frac{3^{-1+n}}{2} - \frac{1}{2} 3^{-1+2n} & \frac{5\, 3^{-1+n}}{2} + \frac{1}{2} 3^{-1+2n} \end{pmatrix}$$

Vérification :
MatrixPower[mA,n] retourne la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice mA.

```
MatrixPower[mA, n] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 3^{-1+n} + 2 \times 3^{-1+2n} & -3^{-1+n} + 3^{-1+2n} & 3^{-1+n} - 3^{-1+2n} \\ -3^{-1+n} + 3^{-1+2n} & \frac{5\, 3^{-1+n}}{2} + \frac{1}{2} 3^{-1+2n} & \frac{3^{-1+n}}{2} - \frac{1}{2} 3^{-1+2n} \\ 3^{-1+n} - 3^{-1+2n} & \frac{3^{-1+n}}{2} - \frac{1}{2} 3^{-1+2n} & \frac{5\, 3^{-1+n}}{2} + \frac{1}{2} 3^{-1+2n} \end{pmatrix}$$

4-2-Système récurrent.

Problème :
Résoudre un système récurrent avec ou sans conditions initiales.

Exemple :
On reprend l'exemple initial.

$$\mathtt{mA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

```
eltP = Eigensystem[mA]
```

```
{{3, 1, 0}, {{1, -3, 2}, {-1, 1, 0}, {-2, 3, 2}}}
```

```
mDn = DiagonalMatrix[{3^n, 1, 0}];
mP = Transpose[eltP[[2]]];
mAn = mP.mDn.Inverse[mP];
mAn.Transpose[{{1, 1, 1}}] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{2}-\frac{3^n}{2} \\ -\frac{7}{2}+\frac{3^{1+n}}{2} \\ -3^n \end{pmatrix}$$

On obtient donc, pour tout entier naturel n, $\begin{cases} u_n = \frac{7}{2}-\frac{3^n}{2} \\ v_n = -\frac{7}{2}+\frac{3^{n+1}}{2} \\ w_n = -3^n \end{cases}$

4-3-Système différentiel.

Problème :
Résoudre un système différentiel linéaire d'ordre 1, à coefficients constants, avec ou sans second membre, avec ou sans conditions initiales.

Exemple :
Résoudre sur $\mathbb{R}$ le système différentiel de variable t
$\begin{cases} x'_1 = 5x_1 - 2x_2 + e^t \\ x'_2 = -x_1 + 6x_2 + t \end{cases}$

Méthode :
On pose X(t)=$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, A=$\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ et B(t)=$\begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$
Le système s'écrit X '(t)=AX(t)+B(t) (s1).
On diagonalise A : A=PDP^{-1} et on réécrit le système en multipliant à gauche par P^{-1} ; on obtient P^{-1}X '(t)=DP^{-1}X(t)+P^{-1}B(t), c'est à dire, en posant Y(t)=P^{-1}X(t) et C(t)=P^{-1}B(t), le nouveau système Y '(t)=DY(t)+C(t) (s2).
On détermine Y en résolvant les équations différentielles linéaires constituant (s2) puis X grâce à la relation X(t)=PY(t).
On remarque que le calcul de P^{-1} n'est utile que pour déterminer C(t) ; on se dispensera donc d'inverser P lorsque (s1) est homogène.

4-4-Recherche d'extremum (MP, PSI).

Soit p un entier supérieur ou égal à 1 et soit une fonction f : $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$.
On appelle D l'ensemble de définition de f et a $\in$ D.

Définition
On dit que f admet en a un maximum local lorsque
$\exists$ r > 0 tel que $\forall$ x $\in$ D $\cap$ B (a , r) f (x) $\leq$ f (a)

On définit de manière analogue un maximum local strict, un minimum local et un minimum local strict.
Lorsque f n'est pas de classe C^1 en a ou lorsque D n'est pas ouvert, il n'existe pas de méthode simple permettant de détecter les extrema de f. Dans le cas contraire, la formule de Taylor permet de donner une condition nécessaire d'ordre 1 pour que f possède un extremum en a.

Propriété

Si f est de classe C^1 sur un ouvert A de $\mathbb{R}^p$ et si f admet un extremum local en a $\in$A, alors a est point critique de f, c'est à dire que df_a est la fonction nulle ou que gradf(a) est nul.

Démonstration :

Si f a un maximum local en a, $\exists$ r > 0 tel que $\forall$ x $\in$ A $\cap$ B (a , r) $f(x) \leq f(a)$

Pour tout h tel que a + h $\in$ A $\cap$ B (a , r) on a donc $f(a + h) - f(a) \leq 0$

Le taux de variation $\frac{f(a_1+h_1, a_2, ..., a_p) - f(a_1, a_2, ..., a_p)}{h_1}$ est donc du signe de - h_1 et il admet $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ (a) comme limite quand h_1 tend vers 0. $\frac{\partial f}{\partial x_1}$(a) est donc nulle. On démontre de manière analogue que les autres dérivées partielles sont nulles.

On cherchera donc les éventuels extrema de f parmi ses points critiques, mais "a est point critique de f " est une condition nécessaire, non suffisante pour que f ait un extremum en a.

Exemples :

a) f : x $\mapsto x^3$ admet un unique point critique en 0, mais ne possède aucun extremum.

b) f : (x , y) $\mapsto x^2 + y^2 + 1$ a un unique point critique en (0 , 0) et il correspond à un minimum local.

c) f : (x , y) $\mapsto$ xy a un unique point critique en (0 , 0) mais ce n'y a pas d'extremum.

- **Formules de Taylor d'ordre 2.**

On suppose que f est de classe C^2 sur un ouvert A de $\mathbb{R}^p$.

Définition

On appelle différentielle seconde de f en a $\in$ A l'application

$d^2 f_a : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$

$$(h_1, h_2, ..., h_p) \mapsto \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_p \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$$

où S est la matrice carrée d'ordre p définie par S = ($\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$(a)) $_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq p}}$

D'après le théorème de Schwarz, S est symétrique donc orthodiagonalisable.

On suppose que h vérifie [a , a + h] $\subset$ A

Propriété (formule de Taylor-Young)
Si f est C^2 sur A et si h vérifie [a , a + h] $\subset$ A, alors
$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}\, d^2f_a(h) + \|h\|^2 \epsilon(h)$
où $\lim\limits_{0} \epsilon = 0$.

Propriété (formule de Taylor-Lagrange)
Si f est C^2 sur A et si h vérifie [a , a + h] $\subset$ A, alors il existe $\theta \in]\,0\,,1\,[$ tel que
$f(a+h) = f(a) + df_a(h) + \frac{1}{2}\, d^2f_{a+\theta h}(h)$

Ceci permet de montrer une condition suffisante d'ordre 2 pour que f ait un extremum en a.

Propriété
Si f a un point critique en a et si les valeurs propres de S = $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le p\\ 1\le j\le p}}$ sont de même signe et non toutes nulles, alors f a un extremum en a ; si elles sont de signes différents, f n'a pas d'extremum en a.

Démonstration :

Le signe de f (a + h) - f (a) est donné par celui de $d^2 f_a(h) = (h_1 \;\dots\; h_p)\, S \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$

On choisit une base (b) orthonormée de vecteurs propres de S et on appelle P la matrice (orthogonale) dont les colonnes sont les matrices de coordonnées des vecteurs de (b) relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
On peut écrire S = P.D.${}^tP$ où D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de S.

D'aurtre part, en notant $\begin{pmatrix} h'_1 \\ \vdots \\ h'_p \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de h relativement à (b), on a $\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} h'_1 \\ \vdots \\ h'_p \end{pmatrix}$.

Donc $d^2 f_a(h) = (h'_1 \;\dots\; h'_p)\, {}^tP . P.D.{}^tP . P \begin{pmatrix} h'_1 \\ \vdots \\ h'_p \end{pmatrix} = (h'_1 \;\dots\; h'_p)\, D \begin{pmatrix} h'_1 \\ \vdots \\ h'_p \end{pmatrix} = \lambda_1 {h'_1}^2 + \dots + \lambda_p {h'_p}^2$ en appelant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de S.

Si les valeurs propres sont toutes strictement positives, ceci est strictement positif pour tout h non nul et f possède un minimum en a ; si elles sont strictement négatives, il s'agit d'un maximum.

Exemple :

$f : (x, y) \mapsto \frac{1}{4}x^3 + x^2 + y^2 + xy$ possède deux points critiques (0 , 0) et (- 2 , 1).

En (0 , 0), $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ses valeurs propres sont 3 et 1 ; ily a donc un minimum local en (0 , 0).

En (- 2 , 1), $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, ses valeurs propres sont $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$; il n'y a pas d'extremum en (- 2 , 1).

5-DIAGONALISATION D'UN ENDOMORPHISME (MP).

Dans cette partie, K=ℝ ou ℂ, E est un K-espace vectoriel et U est un endomorphisme de E. Mais, contrairement aux hypothèses faites dans les trois parties précédentes, E n'est plus supposé de dimension finie ; il n'y a donc plus de représentation matricielle possible de U et la notion de polynôme caractéristique est également caduque. Les notions de valeurs et vecteurs propres peuvent néanmoins être étendues à ce cas.

5-1-Valeurs et vecteurs propres.

Définition 1
Un vecteur x de E est appelé vecteur propre de U lorsque
. $x \neq 0_E$
. $\exists\, \lambda \in K \quad U(x)=\lambda x$

Définition 2

Un scalaire $\lambda \in K$ est appelé valeur propre de U lorsque
$\exists x \in E - \{0_E\} \quad U(x)=\lambda x$

5-2-Sous-espace propre.

Définition
Soit λ une valeur propre de U .
On appelle sous-espace propre associé à λ le sous-espace vectoriel
$\mathcal{V}(\lambda) = \{x \in E \mid U(x)=\lambda x\}$

Les remarques faites au 2-2 restent valables.

5-3-Exemple.

$E=C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $U : f \mapsto f'$
Un réel λ est valeur propre de U si et seulement si il existe $f \in E - \{0_E\}$ telle que $f'=\lambda f$.
f doit être solution sur ℝ de l'équation différentielle $y'-\lambda y=0$.
Tout réel λ est donc valeur propre de U et le sous-espace propre associé est
$\mathcal{V}(\lambda)=\{x \mapsto Ce^{\lambda x} / C \in \mathbb{R}\}$.
$\mathcal{V}(\lambda)$ est une droite vectorielle (c'est à dire un sous-espace de dimension 1) dont une base est l'application $x \mapsto e^{\lambda x}$.

5-4-Propriétés.

Caractérisation des valeurs propres:

Propriété 1
Soit $\lambda \in K$.
λ est valeur propre de U si et seulement si $U - \lambda\, id_E$ est non injective
Dans ce cas, $\mathcal{V}(\lambda)$ est le sous-espace vectoriel $Ker(U - \lambda\, id_E)$.

Démonstration :
- λ est valeur propre de U si et seulement si il existe un vecteur x non nul tel que $U(x)-\lambda x=0_E$ c'est à dire si et seulement si le noyau de $U-\lambda id_E$ contient un vecteur non nul. Or un endomorphisme de E est injectif si et seulement si son noyau est réduit à $\{0_E\}$.
- Dans le cas où λ est valeur propre de U, $\mathcal{V}(\lambda)=\{x \in E / U(x)=\lambda x\}=Ker(U-\lambda id_E)$

Propriété des sous-espaces propres :

Propriété 2
Soit λ une valeur propre de U
$\mathcal{V}(\lambda)$ est stable par U

Démonstration :
Il s'agit de montrer que $U(\mathcal{V}(\lambda))\subset\mathcal{V}(\lambda)$.
Si $y \in U(\mathcal{V}(\lambda))$, il existe un $x\in\mathcal{V}(\lambda)$ tel que $y=U(x)$.
Puisque $x \in V(\lambda)$, $U(x)=\lambda x$; donc, $U(y)=U(U(x))=U(\lambda x)=\lambda U(x)=\lambda y$.
$U(y)=\lambda y$ veut dire que $y\in\mathcal{V}(\lambda)$.

Propriété des vecteurs propres :

Propriété 3
Soient $x_1, \ldots, x_p$ p vecteurs propres de U, respectivement associés à p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$
La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre .

Démonstration :
On définit $\mathcal{P}(p)$ par "Soient $x_1, \ldots, x_p$ p vecteurs propres de U, respectivement associés à p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. La famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre"
- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car une famille constituée par un seul vecteur non nul est libre.
- Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie et soient $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ p+1 vecteurs propres de U, respectivement associés à p+1 valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$.
Il faut montrer que $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1})$ est libre ; pour cela supposons que
$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1} x_{p+1} = 0_E$ (1)
Composons (1) par U : $\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \ldots + \alpha_p \lambda_p x_p + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} x_{p+1} = 0_E$
D'autre part multiplions (1) par λ_{p+1} : $\alpha_1 \lambda_{p+1} x_1 + \ldots + \alpha_p \lambda_{p+1} x_p + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1} x_{p+1} = 0_E$
Puis soustrayons membre à membre les deux dernières égalités :
$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 + \ldots + \alpha_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p = 0_E$.
L'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(p)$ et le fait que toutes les valeurs propres soient distinctes impliquent que $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p=0$.
On reporte ce résultat dans (1) et on obtient $\alpha_{p+1}x_{p+1}=0_E$ donc $\alpha_{p+1}=0_E$.
$\mathcal{P}(p+1)$ est donc démontrée.