# EXERCICES DE MATHEMATIQUES
*(Filière MP)*

## CHAPITRE 6: SUITES ET SERIES DANS UN ESPACE VECTORIEL NORME

### §1. LIMITES ET EQUIVALENTS :

**1.** Prouver l'existence de $\alpha \in ]0,+\infty[$ tel que : $\forall x \in ]0,\alpha[\quad 0 < x^2|\ell n\, x| < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

**2.** Prouver l'existence de $\beta \in ]0,+\infty[$ tel que :

a) $\forall x \in ]\beta,+\infty[\quad 0 < x^3 e^{-x} < \dfrac{1}{x^2}$ ;

b) $\forall x \in ]\beta,+\infty[\quad 0 < \dfrac{\ell n x}{x^2} < \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ .

**3.** Prouver l'existence de $\alpha \in ]0,+\infty[$ tel que :

a) $\forall x \in ]-\alpha,\alpha[-\{0\}\quad \dfrac{\ell n(1+x)}{x} > \dfrac{1}{2}$;  b) $\forall x \in ]-\alpha,\alpha[-\{0\}\quad \dfrac{1-\cos x}{x^2} < \dfrac{3}{4}$ .

**4.** Etudier l'existence d'une limite réelle en $+\infty$ pour la fonction F de R dans R telle que :
$F(x) = \int_0^x e^{-t}\operatorname{Arc}\tan(t^2)\,dt$ [on ne cherchera pas à calculer cette primitive].

**5.** Déterminer un équivalent en 0 [de la forme $cx^\gamma$, avec c et $\gamma$ réels] de la fonction f de R dans R telle que :

a) $f(x) = \dfrac{(1-\cos x)^2 \sin^2 x}{x^3 \ell n(1+x)}$ ;  b) $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{1-\cos x}$  c) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{1-x} - e^x - \frac{x^2}{2}}{x\,\ell n(1+x)}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;  e) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}\ell n\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;  f) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\operatorname{sh} x}$.

**6.** Déterminer un équivalent en $+\infty$ [de la forme $cx^\gamma$, avec c et $\gamma$ réels] de la fonction f de R dans R telle que :

a) $f(x) = e - \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$;  b) $f(x) = \left(\cos\dfrac{1}{x}\right)^x - 1$ ;  c) $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x - ex\,\ell n\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

$\frac{e}{2x}$  $\sim -\frac{1}{4x}$  $\frac{e}{8x^2}$

**7.** Déterminer un équivalent en $\dfrac{\pi}{2}$ [de la forme $c\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)^\gamma$, avec c et $\gamma$ réels] de la fonction f de R dans R telle que :

a) $f(x) = \dfrac{\ell n(\sin x)}{(\pi-2x)^3}$ ;  b) $f(x) = 1-(\sin x)^{\tan x}$.

**8.** Etudier la limite en 0 de la fonction f de R dans R telle que :

a) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ ;  b) $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;  $\to e^{-\frac{1}{3}}$

c) $f(x) = \dfrac{x - \operatorname{Arc}\sin x}{\sin^3 x}$ ;  d) $f(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{1/x}$.

**9.** Etudier la limite en a de la fonction f de R dans R telle que :

a) $f(x)=\dfrac{e^{x+x^2}-e^{2x}}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}, a=1$ ; b) $f(x)=\left(\tan\dfrac{3}{2}x\right)^{\tan(3x)}, a=\dfrac{\pi}{6}$; c) $f(x)=\left[\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x}\right]^{\frac{1}{\cos^2 x}}, a=\dfrac{\pi}{2}$.

## §2. SUITES DANS UN E.V.N

**10.** Soit $(E,\| \ \|)$ un e.v.n., $x\in E$ et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que $B'(x,\varepsilon)$ est un fermé de E (indication : si y est adhérent à $B'(x,\varepsilon)$, prouver que : $\forall r\in\mathbb{R}_+^* \quad d(x,y)<\varepsilon+r$).

**11.** Soit $(E,\| \ \|)$ un e.v.n. Soient $a\in E$ et $A\subset E$.

a) Montrer que $\overset{o}{A}$ est un ouvert inclus dans A. Si 0 est un ouvert inclus dans A, montrer que $0\subset\overset{o}{A}$.

b) Soit $\varepsilon>0$, montrer que : $B(a,\varepsilon)\subset\overset{o}{\overbrace{B'(a,\varepsilon)}}$

c) Soit x tel que $\|x-a\|=\varepsilon$ et soit $r>0$ ; montrer que B(x,r) n'est pas incluse dans $B'(a,\varepsilon)$.

(On pourra utiliser $y=x+\dfrac{r}{2}\dfrac{x-a}{\|x-a\|}$).

d) Conclure.

**12.** Montrer que tout singleton d'un e.v.n E est un fermé de E.

**13.** Soit $(E,\| \ \|)$ un e.v.n. Soient $a\in E$ et $A\subset E$.

a) Montrer que $\overline{A}$ est un fermé contenant A. Si F est un fermé contenant A, montrer que $\overline{A}\subset F$.

b) Soit $\varepsilon>0$, montrer que : $\overline{B(a,\varepsilon)}\subset B'(a,\varepsilon)$.

c) Montrer que $\overline{B(a,\varepsilon)}=B'(a,\varepsilon)$ (pour x tel que $d(a,x)=\varepsilon$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$, on pourra utiliser $y=\dfrac{r}{2\varepsilon}.a+\left(1-\dfrac{r}{2\varepsilon}\right)x$).

**14.** Soit A une partie bornée non vide de R. Montrer que inf A et sup A sont des points adhérents à A.

**15.** On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est muni canoniquement de trois normes définies, pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)$, respectivement par : $\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ et $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$.

a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}^n \quad \|x\|_\infty\le\|x\|_2\le\|x\|_1\le n\|x\|_\infty$ et $\|x\|_2\le\sqrt{n}\,\|x\|_\infty$.

b) Représenter sur un même schéma les boules ouvertes de $\mathbb{R}^2$, de centre O et de rayons 1 et 2, correspondant à chacune de ces trois normes.

**16.** Soit $(E,\| \ \|)$ un e.v.n. Montrer que E et $\phi$ sont des ouverts de E, que toute intersection finie d'ouverts de E et toute réunion (finie ou non) d'ouverts de E sont des ouverts.

**17.** Dans $E = B([0,1], R)$ muni de la norme $\| \ \|_{[0,1]}$ $\left(\|f\|_{[0,1]} = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|\right)$ on considère la partie $F = C([0,1]R)$ et l'élément $f_0 : [0,1] \to R$.

$$x \to \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ 2 \text{ si } x \in \left]1/2, 1\right] \end{cases}.$$

Prouver que : $d(f_0, F) = \inf\limits_{f\in F} d(f_0, f) = \dfrac{1}{2}$.

(Indication : s'il existait $g \in F$ tel que $\|f_0 - g\|_{[0,1]} < \dfrac{1}{2}$, montrer que l'on aurait à la fois : $g\left(\dfrac{1}{2}\right) < \dfrac{3}{2}$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) \geq \dfrac{3}{2}$).

**18.** Soit A une partie d'un e.v.n. E.

a) Montrer que : $¥_E \overline{A} = \overset{\circ}{\overline{¥_E A}}$ .

b) En déduire que A est un fermé de E si et seulement si $¥_E$ A est un ouvert.

c) Quelles sont, pour les fermés de E, les analogues des propriétés des ouverts démontrées dans l'exercice 1.171 ?

**19.** Soit A une partie d'un e.v.n E; on appelle frontière de A l'ensemble

$$Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap ¥_E \overset{\circ}{A})$$

Montrer que Fr(A) est un fermé de E.
(On pourra montrer que $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{¥_E A}$ et utiliser l'exercice 1.173 c).
Déterminer Fr(A) si A est une boule ouverte, une boule fermée de E.

**20.** Soit $(E, \| \ \|)$ un e.v.n.

a) Soit A une partie bornée non vide de E. Montrer que $\{d(x,y) / (x,y) \in A^2\}$ admet une borne supérieure.
On appelle diamètre de A le réel : $\delta(A) = \sup\limits_{(x,y)\in A^2} d(x,y)$.

b) Soit B une boule (ouverte ou fermée) de rayon ε. Montrer que B est une partie bornée de E, et que : $\delta(B) = 2\varepsilon$.
E désignant la partie entière.
Calculer $N(u_\alpha)$ et $N_\infty(u_\alpha)$.

d) N et $N_\infty$ sont-elles équivalentes ?

**21.** Montrer qu'une suite $(u_n)$ d'un K-espace vectoriel E converge, au sens d'une norme $\|.\|$, vers au plus un point $\ell$ de E.

**22.** Soit $(u_n)$ une suite convergente d'un e.v.n. E et $\ell$ sa limite.

a) Montrer que la suite $(u_n)$ est bornée (indication : considérer les termes de la suite $(u_n)$ qui n'appartiennent pas à $B(\ell, 1)$ ).

b) Montrer que toute suite extraite de $(u_n)$ converge et admet $\ell$ pour limite.

**23.** Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites convergentes d'un e.v.n E et $\ell = \lim u_n$, $\ell' = \lim v_n$. Montrer, que pour tout $\lambda \in K$, la suite $(u_n + \lambda v_n)_{n\in N}$ est convergente et a pour limite $\ell + \lambda\ell'$.

**24.** Soient $(u_{1,n})_{n\in N}$, $(u_{2,n})_{n\in N}$, $\dots (u_{p,n})_{n\in N}$ p suites de réels, $(u_n)_{n\in N}$ la suite de $R^p$ de terme général $u_n = (u_{1,n}, u_{2,n}, \dots, u_{p,n})$ et $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p) \in R^p$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in N}$ converge et admet $\ell$ pour limite (relativement à l'une quelconque des normes de $R^p$) si et seulement si, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ la suite $(u_{i,n})_{n\in N}$ converge vers $\ell_i$ dans $(R, |\ |)$.

**25.** On munit $E = R[X]$ de la norme $\|\ \|$ qui à un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k k$ associe $\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, et on considère la suite $(X^n)_{n\in N}$. Montrer que de cette suite, on ne peut extraire de suite convergente (indication : calculer $\|X^p - X^q\|$ pour tout (p,q) ). La boule fermée de centre 0 et de rayon 1 de $(E, \|\ \|)$ est-elle compacte ?

**26.** Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite d'un e.v.n $(E, \|\ \|)$.

a) Montrer que si $(u_n)$ est convergente, alors $(u_n)$ est de CAUCHY (indication : si $\ell = \lim u_n$, remarquer que : $\|u_{n+p} - u_n\| \le \|u_{n+p} - \ell\| + \|\ell - u_n\|$ ).

b) On suppose que : $\forall n \in N$, $\|u_{n+1} - u_n\| \le \dfrac{1}{2^n}$. Prouver que $(u_n)$ est de CAUCHY.

**27.** On considère $E = C([0,1], R)$ et $(f_n)_{n\ge 1}$ la suite de E déterminée de la façon suivante : soit $\forall n \in N^*$, pour $t \in \left[0, \dfrac{1}{2n}\right]$ $f_n(t) = 2nt$, pour $t \in \left[\dfrac{1}{2n}, \dfrac{1}{n}\right]$ $f_n(t) = -2nt + 2$, et pour $t \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right]$ $f_n(t) = 0$. On munit E des normes $\|\ \|_{[0,1]}$ et $\|\ \|_1$ définies dans l'exercice 1.162 et l'exercice 1.163.

Calculer $\|f_n\|_{[0,1]}$ et $\|f_n\|_1$, pour tout $n \in N^*$. Les normes $\|\ \|_{[0,1]}$ et $\|\ \|_1$ sont-elles équivalentes ?

**28.** Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite de CAUCHY d'un e.v.n E.

a) Montrer que la suite $(u_n)$ est bornée.

b) Montrer que toute suite extraite de $(u_n)$ est de CAUCHY.

c) On suppose qu'il existe une suite extraite de $(u_n)$ qui soit convergente. Montrer que la suite $(u_n)$ converge.

**29.** Sur $E = C([0,1], R)$, on définit $\gamma_1$ et $\gamma_2$ par $\gamma_1$ et $\gamma_2$ par $\gamma_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $\gamma_2(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$.

a) Montrer que $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont des normes de E.

b) Soit la suite $(f_n)_{n>0}$ de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx \text{ si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 0 \text{ si } x \in \left]\dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Calculer $\gamma_1(f_n)$, $\gamma_2(f_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \gamma_2(f_n)$.

$(f_n)_{n>0}$ converge-t-elle au sens de $\gamma_2$ ?

c) Montrer que si $(f_n)_{n>0}$ converge vers f au sens de $\gamma_1$, alors $\forall x \in ]0,1]$ $f(x)=0$. $(f_n)_{n>0}$ converge-t-elle au sens de $\gamma_1$ ?

d) $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont-elles équivalentes ?

**30.** Soit $(E, \| \ \|)$ un e.v.n et $a \in E$. Montrer que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \ |d(a,x) - d(a,y)| \leq d(x,y)$$

En déduire que l'application $\underset{x \to d(a,x)}{d(a,\bullet): E \to R_+}$ est continue sur E.

Qu'en est-il de l'application $\| \ \|: E \to R_+$ ?

**31.** $(E, \| \ \|)$ étant un e.v.n., on définit sur $E \times E$ la norme : $(x,y) \to |||(x,y)||| = \|x\| + \|y\|$ (voir exercice 1.176).

Montrer que les applications suivantes sont continues :

a) $s: \underset{(x,y) \to x+y}{E \times E \to E}$

b) $\tilde{\lambda}: \underset{x \to \lambda x}{E \to E}$ où $\lambda$ est donné dans K.

c) $\max: \underset{(x,y) \to \max(x,y)}{R \times R \to R}$ et $\min: \underset{(x,y) \to \min(x,y)}{R \times R \to R}$

(indication : vérifier que, pour tout $(x,y) \in R \times R$ $\max(x,y) = \frac{1}{2}(x + y + |x-y|)$ ).

**32.** Soit E et F deux e.v.n, A une partie de E et $f: A \to F$ une application.

a) Vérifier que f est continue en $a \in A$ si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad f(B(a,\eta) \cap A) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

b) En déduire que si f est continue en a, et si $g: f(A) \to G$ est continue en f(a), alors $g \circ f$ est continue en a.

**33.** Soit $f: R \to R$ vérifiant

- $\forall (x,y) \in R^2, f(x+y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$
- $f \neq 0$
- f est continue en 0

a) Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

b) Montrer que $\forall n \in N$, $f(n) = n$ puis que $\forall \frac{p}{q} \in Q$, $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$.

c) Montrer que f est continue sur R.

d) En déduire que f est l'application identique de R.

**34.** Soit $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ une application continue.

a) On suppose que : $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ et $\forall x\in[\alpha,\beta]\ f(x)>0$. Prouver l'existence de $k\in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall x\in[\alpha,\beta]\ f(x)\geq k$.

b) On suppose que : $f\neq 0$ et $\forall x\in[a,b]\ f(x)\geq 0$. Démontrer que : $\int_a^b f(t)\,dt>0$ (indication : si $x_0\in[a,b]$ est tel que $f(x_0)>0$, déduire de la continuité de f en $x_0$ l'existence de $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ tel que : $\alpha<\beta$ et $\forall x\in[\alpha,\beta]\quad f(x)>0$).

## §3. SUITES ET SERIES COMPLEXES :

**35.** Si u est une suite bornée et v une suite convergente vers 0, montrer que la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.

**36.** Soit u la suite réelle déterminée par : $\forall n\in \mathbb{N}^*,\ u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Etablir que : $\forall n\in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq u_n\leq\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$. En déduire que u converge ; quelle est sa limite ?

**37.** Soit $(u_n)$ une suite réelle croissante qui admet une suite extraite convergente. Etudier la nature de la suite $(u_n)$.

**38.** Soit u une suite dont les suites extraites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers une même limite (dans K). Montrer que la suite u est convergente.

**39.** Etudier la convergence et déterminer la limite éventuelle de la suite de terme général :

a) $u_n=(n+1)\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$ ; b) $u_n=\left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ ; c) $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+1}\,\ell n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)}{\sin\dfrac{1}{n}}$ ;

d) $u_n=\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{\tan\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)}$; e) $u_n=e^{-n}\ \mathrm{ch}\sqrt{1+n^2}$ ; f) $u_n=\dfrac{\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^n-e^{1-\frac{1}{2n}}}{\left(1+\tan\dfrac{1}{n}\right)^n-e^{1-\frac{1}{2n}}}$ ;

g) $u_n=n^2\left(e^{\frac{1}{n}}-e^{\frac{1}{n+1}}\right)$ ; h) $u_n=n^{1+\frac{1}{n}}-(n-1)^{1+\frac{1}{n-1}}$ ; i) $u_n=\left(\dfrac{1}{n^2}+\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ ;

j) $u_n=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{n\pi}{6n+3}\right)\right]^n$ ; k) $u_n=\left[\dfrac{\mathrm{Arc}\tan(n+1)}{\mathrm{Arc}\tan n}\right]^{n^2}$.

**40.** Etudier la suite des sommes partielles et la convergence de la série de terme général :

a) $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ ; b) $u_n=\ell n\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)\ (n\geq 2)$ ; c) $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ .

**41.** Etudier la convergence et, le cas échéant, déterminer la somme de la série de terme général : $u_n=\dfrac{x^{2^n}}{x^{2^{n+1}}-1}$,

où x est un réel tel que : $|x|\neq 1$. (On pourra remarquer que : $\dfrac{t}{t^2-1}=\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t^2-1}$).

$= \frac{1}{n} - \frac{1}{3(n-1)} - \frac{2}{3(n+2)}$ $\quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n} - \frac{1}{3}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-1} - \frac{2}{3}\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n+2}$

$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} - \frac{2}{3}\sum_{n\geq 4}\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

$\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}\right)$

$\frac{15-11}{18} = \frac{4}{18} = \boxed{\frac{2}{9}}$

**42.** Prouver la convergence et déterminer la somme de la série de terme général :

a) $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$ ; b) $u_n = \dfrac{n-2}{n(n-1)(n+2)}$ (on pourra déterminer trois réels $\alpha, \beta$ et $\gamma$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ $u_n = \dfrac{\alpha}{n-1} + \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{\gamma}{n+2}$) ; c) $u_n = \dfrac{4n-3}{n(n^2-4)}$ $(n \geq 3)$ ;

$\frac{3}{4n} + \frac{5}{8(n-2)} - \frac{11}{8(n+2)}$

d) $u_n = \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$ (on pourra exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n$ en fonction de $\tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{1}{n+1}\right)$).

$= \dfrac{\sin\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1} - \cos\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n+1}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}} = \tan\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n+1}$

**43.** Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\ell n$, montrer que : $\ell n(n+1) - \ell n(n) \leq \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire une minoration de $S_n$. Que peut-on en déduire pour la série $\left[\frac{1}{n}\right]_{n\geq 1}$.

**44.** Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$, où p est un entier naturel donné, $p \geq 2$.

Montrer que, pour tout $n \geq 2$ : $S_n \leq 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{(n-1).n}$.

En déduire que la série $\left[\frac{1}{n^p}\right]$ converge.

**45.** On se propose d'établir que la série $\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right]$ est convergente et de calculer sa somme.

a) Calculer la somme : $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}x^{n-1}$, pour tout réel x.

En déduire l'égalité : $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ell n(2) + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.

b) Montrer, au moyen d'une majoration, que : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = 0$.

En déduire la solution du problème posé.

**46.** On considère, pour chaque $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la série de terme général :

$$u_n = a\ \ell n(n) + b\ \ell n(n+1) + c\ \ell n(n+2)$$

a) Montrer que, si : $a + b + c \neq 0$, alors la série $[u_n]$ diverge grossièrement.

b) On suppose que : $a + b + c = 0$. Calculer $S_n$, pour tout $n \geq 1$.

En déduire les triplets (a,b,c) pour lesquels la série $[u_n]$ converge, et préciser sa somme dans ce cas.

/

**47.** Soit $[a_n]$ une série de réels positifs, $(S_n)$ la suite des sommes partielles de cette série, et $(u_n)$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$ : $2\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n^2 + a_n}$.

Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante et que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ : $u_{n+1} \leq u_n + \frac{1}{4} a_n$.

En déduire que la série $[a_n]$ et la suite $(u_n)$ sont de même nature (on pourra vérifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ : $u_{n+1} \leq u_0 + \frac{1}{4} S_n$ et $S_n \leq 4(u_{n+1}^2 - u_0^2)$).

**48.** On désigne par E l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de nombres complexes telles que la série $\left[|u_n|^2\right]$ converge. Pour une suite $u = (u_n)$ de E, on pose : $\|u\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$.

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

**49.** Soit a et b deux éléments de R et les séries $[u_n]$ et $[v_n]$ définies par : $u_n = \frac{a^n}{n!}$ et $v_n = \frac{b^n}{n!}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Quel est le terme général de la série produit de $[u_n]$ par $[v_n]$ ?

**50.** Calculer le terme général de la série produit de $\left[\frac{1}{(2n)!}\right]$ par $\left[\frac{1}{(2n+1)!}\right]$.

**51.** Prouver la convergence et déterminer la somme de la série de terme général : $u_n = \frac{\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} + 1}{2^{n+1}}$.

**52.** Une suite $(d_n)$ de Z est un développement décimal d'un réel x si, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ : $d_n \in \{0,1,\ldots,9\}$, et si la série $[d_n 10^{-n}]$ converge et a pour somme x :

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n 10^{-n} = d_0, d_1 d_2 \ldots . d_n \ldots .$$

Soit $x \in \mathbf{R}$ et $(d_n)$ un développement décimal de x.

1°) On suppose que la suite $(d_n)$ est constante à partir d'un certain rang $n_0$ :

$$\forall n \geq n_0 \quad d_n = d, \text{ avec } d \in \{0,1,\ldots,9\}.$$

a) Montrer que x est un rationnel.

b) Si d = 9, montrer que x admet un autre développement décimal $(d'_n)$ que l'on précisera.

2°) On suppose qu'il existe $p_0 \in \mathbf{N}$ tel que :

$$\forall p \geq p_0 \quad d_{2p} = a \text{ et } d_{2p+1} = b, \text{ avec } (a,b) \in \{0,1,\ldots,9\}^2.$$

Montrer que x est rationnel.

3°) Quelles suites $(d_n)$ sont des développements décimaux de rationnels ?

**53.** Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$. Justifier la convergence de cette série. Former le terme général $v_n$ de la série-produit de $[u_n]$ par elle-même.

Montrer que la série $[v_n]$ diverge. ( Indication : remarquer que l'application de R dans R, déterminée par : $x \mapsto x(n-x)$, admet un maximum de valeur $\frac{n^2}{4}$, pour minorer ensuite $|v_n|$ ).

**54.** Déterminer un entier n tel que : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ soit une valeur approchée de $\ell n 2$ à $10^{-5}$ près.

**55.** Etant donné $x \in \mathrm{R}$, étudier la nature de la série de terme général :

a) $u_n = \dfrac{\cos nx}{\sqrt{n}}$ ; b) $u_n = \dfrac{\cos nx}{(n+1)^2}$ ; c) $u_n = \dfrac{(-1)^n \sin nx}{n}$.

**56.** Etant donné $x \in \mathrm{R}$, prouver la convergence et déterminer la somme des séries de terme général respectif : $u_n = \dfrac{\cos nx}{2^n}$ et $v_n = \dfrac{\sin nx}{2^n}$.

**57.** On considère la série réelle $[u_n] = \left[\dfrac{(-1)^n}{4n+1}\right]$.

Justifier sa convergence. On désigne alors par S sa somme, et par $S_n$ sa somme partielle d'ordre n.

Montrer que : $S_{n-1} = \int_0^1 \dfrac{1-(-1)^n t^{4n}}{1+t^4}\, dt$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

En déduire que : $S = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^4}$. Achever le calcul de S.

**58.** Soit f une application de $[0,1]$ dans $\mathrm{R}$, continue, positive et croissante. On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} f\left(e^{-t}\right) dt \quad \text{et} \quad u_n = f\left(e^{-n}\right), \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

Montrer que l'intégrale I et la série $[u_n]$ sont de même nature.

**59.** On considère la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ $(n \geq 1)$. Etablir que : $\dfrac{1}{n+1} \leq R_n \leq \dfrac{1}{n}$, pour tout $n \geq 1$.

**60.** Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathrm{R}$ la suite $(R_n) = \left(\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}\right)$ est-elle définie ?

Etudier alors la convergence de la série $[R_n]$.

**61.** $\beta$ étant un réel donné, montrer que la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n(\ell n\, n)^\beta}$ $(n \geq 2)$ converge si et seulement si $\beta > 1$ (on pourra considérer la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ell n\, x)^\beta}$).

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \times \dfrac{1}{(\ell n x)^\beta} + \dfrac{1}{x} \times -\dfrac{\beta \frac{1}{x}(\ell n x)^{\beta-1}}{(\ell n x)^{2\beta}}$

$= -\dfrac{1}{x^2(\ell n x)^\beta}\left(1 + \dfrac{\beta}{(\ell n x)^\beta}\right)$

$= \dfrac{1}{x^2(\ell n x)^\beta}\left(\dfrac{(\ell n x)^\beta + \beta}{(\ell n x)^\beta}\right)$

**62.** a) Soit f une application de $[1,+\infty[$ dans R, continue, positive et décroissante, et pour tout $n \in \mathbf{N}$ : $\varphi(n) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)\, dt$. Etablir la convergence de la suite $(\varphi(n))$.

b) En déduire, pour tout $k \in ]0,+\infty[ - \{1\}$, la convergence de la suite $(u_n)$ déterminée par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2^k} + \ldots + \frac{1}{n^k} + \frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{n^{k-1}}.$$

$(\ell n x)^\beta \geq -\beta$

$(\ell n x)^\beta \geq \sqrt{-\beta}$.

c) Prouver la convergence de la suite de terme général : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} - \ell n(n)$

**63.** Exemples de comparaison entre $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ et $[f(n)]$ lorsque f n'est pas décroissante :

a) Soit f l'application de $R_+$ dans R telle que : $\begin{cases} f(0)=0\,; \\ \forall n \in N^* \;\; f(n)=1 \text{ et } f\left(n-\dfrac{1}{2n^2}\right) = f\left(n+\dfrac{1}{2n^2}\right)=0\,; \\ f \text{ est affine par morceaux sur } R_+ \end{cases}$

Vérifier que la série diverge et que l'intégrale converge.

b) Soit f l'application de $R_+$ dans R telle que : $\begin{cases} \forall n \in N^* \;\; f(n)=0 \text{ et } f\left(n-\dfrac{1}{2n}\right) = f\left(n+\dfrac{1}{2n}\right)=1\,; \\ f \text{ est affine par morceaux sur } R_+ \end{cases}$

Vérifier que la série converge et que l'intégrale diverge.

**64.** Etudier la nature de la série de terme général :

a) $u_n = \dfrac{1}{\ell n(n)}$ ; b) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$ ; c) $u_n = e^{-n^2}$ ; d) $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$.

**65.** Etant donné $a \in ]0,+\infty[$, étudier la nature de la série de terme général :

$u_n = \dfrac{1}{n+a^n}$ (on pourra distinguer les cas : $a \le 1$ et $a > 1$).

$0 \leq a^n \leq 1$

$n \leq n+a^n \leq n+1$

$\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n+a^n} \leq \dfrac{1}{n}$ DV

si $a>1$

**66.** Etant donné $\alpha \in R$, étudier la nature de la série de terme général :

a) $u_n = \dfrac{n^\alpha}{e^n}$ ; $= e^{\alpha \ln n - n}$ b) $u_n = \dfrac{\ell n(n)}{n^\alpha}$.

Si $\alpha < 0 \Rightarrow$ CV

**67.** Etant donné $(\alpha,\beta) \in R^2$, montrer que la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ell n\, n)^\beta}$

converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$ (voir exercice 2.53).

**68.** Etudier la convergence de la série de terme général :

a) $u_n = \dfrac{\text{ch}n}{\text{ch}2n}$ ; b) $u_n = \text{Arc}\sin\dfrac{2n}{4n^2+1}$ ; c) $u_n = \dfrac{\ell n(n)}{n}\,\ell n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ ; d) $u_n = \ell n\left(\cos\dfrac{1}{2^n}\right)$.

**69.** Etudier la convergence de la série de terme général :

a) $u_n = \dfrac{1}{n} - \ell n\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)$ ; b) $u_n = \dfrac{1}{n} - \sin \ell n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

**70.** Etant donné $a \in ]-1,+\infty[$, étudier la nature de la série de terme général :

a) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\dfrac{2}{n+a}\right)^n$ $n \ge 2$ ; b) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - e^{1+\frac{a}{n}}$.

**71.** Etant donné $(a,b) \in R^2$, étudier la nature de la série de terme général :

$$u_n = n\,\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right) + a\cos\frac{1}{n} + b\sin\frac{1}{n}.$$

**72.** On considère les séries $[u_n]$ et $[v_n]$ définies par : $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}$. $= \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Montrer que $u_n \sim v_n$, que la série $[u_n]$ converge et que la série $[v_n]$ diverge.

**73.** Etudier la nature des séries :

a) $u_n = \ell n\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$;  b) $u_n = (-1)^n \sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$.

**74.** On considère la série de terme général : $u_n = \text{Arc}\tan\frac{1}{n^2+n+1}$ .

a) Montrer que la série $[u_n]$ converge.

b) Etant donné $a \in \mathbb{R}_+$, vérifier que la fonction

$g : x \mapsto \text{Arc}\tan x + \text{Arc}\tan\left(\frac{a-x}{1+ax}\right)$ est constante sur $[0,+\infty[$.

c) En déduire la valeur de la somme de la série $[u_n]$.

**75.** Soit $[u_n]$ une série convergente de réels positifs.

Montrer que les séries $\left[\frac{u_n}{1+u_n}\right]$ et $\left[\frac{u_n}{1-u_n}\right]$ sont convergentes.

**76.** Soit $a \in ]0,+\infty[$ et la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n^{a-1}n!}$ .

Etudier la série $\left[\ell n\left(\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)\right]$ et en déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

**77.** On considère une suite $(u_n)$ déterminée par son premier terme $u_0 > 0$, et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$. On pose : $v_n = \frac{1}{u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que : $u_n \sim \sqrt{n}$, et que la série $[v_n]$ diverge.

b) En justifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, les inégalités : $\int_0^{n+1}\frac{dx}{\sqrt{u_0^2+x}} \leq v_0+v_1+\ldots+v_n \leq \frac{1}{u_0}+\int_0^n\frac{dx}{\sqrt{u_0^2+x}}$,

montrer que : $v_0+v_1+\ldots+v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

**78.** Soit : $u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ et $v_n = \ell n(u_{n+1}) - \ell n(u_n)$, pour tout $n \geq 1$.

1) a) Etablir la convergence de la série $[v_n]$.

b) En déduire que la suite $(u_n)$ converge vers un réel strictement positif C.

2) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $I_n = \int_0^{\pi/2}\sin^n x\,dx$ et : $w_n = \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}$.

a) En étudiant la suite $(I_n)$, prouver que $(w_n)$ converge vers 1.

b) Trouver un équivalent de $w_n$ en fonction de C (on pourra remarquer que : $n! \sim Cn^n e^{-n}\sqrt{n}$).

c) En déduire le calcul de C, et obtenir la formule de STIRLING : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ .

**79.** 1°) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente, de limite $\ell$.

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $v_n = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n}$, et on se propose d'établir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a aussi pour limite $\ell$.

On donne, pour cela, les indications suivantes :

Remarquer que, pour tout $n \geq \mathbb{N}^*$, $\ell - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\ell - u_k)$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $n \geq N$ on ait : $|\ell - u_n| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Poser pour tout $n \geq N : \sigma_1(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{N} |\ell - u_k|$ et $\sigma_2(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^{n} |\ell - u_k|$.

a) Montrer que pour tout $n \geq N : |\sigma_1(n)| \leq \frac{N}{n} \max_{1 \leq k \leq n} |\ell - u_k|$ ; en déduire qu'il existe un entier naturel $N'$ tel que pour tout $n \geq N'$ : $|\sigma_1(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

b) Montrer par ailleurs que, pour tout $n \geq N : |\sigma_2(n)| < \frac{\varepsilon}{2}$, et conclure.

2°) On considère une suite $(a_n)$ définie par : $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $a_{n+1} = \ell n(1 + a_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que la suite $(a_n)$ converge vers 0.

3°) Soit $(b_n)$ la suite définie par : $b_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.

a) Montrer que la suite $(b_n)$ converge vers $\frac{1}{2}$.

b) En déduire, au moyen du résultat du 1°), que : $a_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{2}{n}$.

Quelle est la nature de la série $[a_n]$?

**80.** 1°) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $a_n = (n+1)\,\ell n(n+1) - n - \ell n(n!)$, et pour tout $n \geq 1$ :
$u_n = a_n - a_{n-1}$.

a) Déterminer le développement limité de $u_n$ à l'ordre 3 au voisinage de l'infini.

b) En déduire la nature de la série $[u_n]_{n \geq 1}$, puis, en considérant la suite des sommes partielles de cette série, montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente.

2°) Etant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $b_n = a_n + \alpha\, \ell n(n+1)$, et, pour tout $n \geq 1 : v_n = b_n - b_{n-1}$.

a) Déterminer le réel $\alpha$ pour lequel la série $[v_n]_{n \geq 1}$ est convergente, et les réels C et D tels que l'on puisse écrire, pour tout entier $k \geq 1 : v_k = \frac{C}{k^2} + \frac{D}{k^3} + \frac{1}{k^3}\, \varepsilon_0\left(\frac{1}{k}\right)$, avec $\lim_{k \to +\infty} \varepsilon_0\left(\frac{1}{k}\right) = 0$.

b) On suppose désormais que la série $[v_n]$ converge, et on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Dire pourquoi l'on a, pour n suffisamment grand, et pour tout $k \geq n+1 : \left|\varepsilon_0\left(\frac{1}{k}\right)\right| < 1$.

En déduire que l'on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\rho_n = C\; R_n + \frac{1}{n}\varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right), \quad \text{avec} \quad \lim_{n \to +\infty} \varepsilon_1\left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

( Indication : majorer $|\, n\,(\rho_n - C\, R_n)|$ ).

3°) a) Montrer que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
On note b la limite de la suite $(b_n)$.

b) Vérifier que, pour tout entier k ≥ 2, on a : $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

En déduire que l'on peut écrire, pour tout entier $n \geq 1$ :

$$R_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_2\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

c) Conclure que l'on peut écrire, pour tout entier $n \geq 1$ :

$$b_n = b - \frac{C}{n} + \frac{1}{n}\,\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right), \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

4°) On pose : $\mu = e^{-b}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $A_n = e^{-b_n}$.

a) Calculer $A_n$ en fonction de n. En déduire alors $\mu$, en utilisant la formule de STIRLING (voir exercice 2.70).

b) Ecrire le développement limité à l'ordre 1 de $A_n$ au voisinage de l'infini.

5°) Application : Etant donné $\beta \in \mathbb{R}$, étudier la nature de la série $[w_n]_{n\geq 1}$ définie par :

$$w_n = (n-1)!\left(\frac{e}{n}\right)^n - \frac{\beta}{\sqrt{n}}.$$

**81.** Etudier la nature de la série de terme général :

a) $u_n = \frac{n!}{n^n}$ ; b) $u_n = \frac{2^n n!}{n^n}$ ; c) $u_n = \frac{2.5.8\ldots(3n-1)}{1.5.9\ldots(4n-3)}$.

**82.** Etudier la nature de la série de terme général :

a) $u_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}$ ; b) $u_n = (-1)^n \frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.5.8\ldots(3n-1)}$.

**83.** On considère la série de terme général : $u_n = \frac{1+n+n^2+n^3}{n!}$.

a) Montrer que $[u_n]$ converge.

b) Déterminer quatre réels $\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$1+n+n^2+n^3 = \alpha + \beta n + \gamma n(n-1) + \delta n(n-1)(n-2).$$

En déduire la somme de la série $[u_n]$.

**84.** Soit $z \in \mathbb{C}$ et les séries $[u_n]$ et $[v_n]$ définies par : $u_n = \frac{z^{2n}}{2^{2n}(2n)!}$ et $v_n = \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

a) Montrer que les séries $[u_n]$ et $[v_n]$ convergent.

b) On note S et T les sommes respectives de $[u_n]$ et $[v_n]$. Prouver que : $2\,S^2 = T + 1$.

**85.** Etant donné $a \in \mathbb{C}$, on considère la série de terme général : $u_n = n\,a^n$.

Trouver une condition nécessaire et suffisante (portant sur a) pour que la série $[u_n]$ converge, et dans ce cas, calculer la somme S de cette série (on pourra exprimer aS en fonction de S et de la somme d'une autre série).

**86.** Etudier la convergence de la série de terme général :

a) $u_n = \frac{(n-2)!}{(n+1)!}$ ; b) $u_n = (-1)^n \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$ ; c) $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$ ;

d) $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$ ; e) $u_n = \frac{\cos 2n}{n\,\ell n(n)}$ ; f) $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ ;

g) $u_n = \dfrac{\sqrt{n(n-1)}}{n^3 + 2\sqrt{n} - 3\,\ell n\, n}$ ; h) $u_n = \operatorname{Arg\,ch}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$; i) $u_n = \ell n\left(\dfrac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)$;

j) $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ; k) $u_n = \dfrac{1}{n}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{2n}}$ ; l) $u_n = \dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ ;

m) $u_n = (-1)^n \tan\dfrac{1}{n}$ ; n) $u_n = \sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1}$ ;

o) $u_n = n\left(2^{1/n^2} - 1\right) - \ell n\left(1+\dfrac{\ell n 2}{n}\right)$; p) $u_n = \left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)(\ell n\, n)^{2004}$ ;

q) $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ ; r) $u_n = (-1)^n\, \sqrt[n]{n}\,\sin\dfrac{1}{n}$ ;

s) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$ ; t) $u_n = \dfrac{n^5+1}{2^n-1}$.

**87.** Etudier suivant les valeurs du réel a, la nature de la série du terme général :

a) $u_n = \dfrac{n}{1+a^{2n}}$ ; b) $u_n = \dfrac{a^n}{1+2+\ldots+n}$ ; c) $u_n = \cos\dfrac{\pi n^2}{2n^2+an+1}$ $(a>0)$;

d) $u_n = e^{an^2}\left(1-\dfrac{a}{n}\right)^{n^3}$ ; e) $u_n = \dfrac{a^n}{2-\sin n}$.

**88.** Etudier, suivant les valeurs des réels a et b, la nature de la série de terme général :

a) $u_n = \ell n\left(\dfrac{n^2+an+1}{n^2+bn+1}\right)$; b) $u_n = \dfrac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$ $(a>0, b>0)$;

c) $u_n = \sin\left(\dfrac{n^2+an+b}{n}\pi\right)$ ; d) $u_n = n + a\sqrt{1+n^2} + \dfrac{b}{n}$.

**89.** Soit $[u_n]$ une série de complexes telle que, quand $n \to +\infty$, $\sqrt[n]{|u_n|}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Montrer que : • si $\ell < 1$, alors la série $[u_n]$ converge absolument ;

• si $\ell > 1$, alors la série $[u_n]$ diverge (règle de CAUCHY).

**90.** Utiliser la règle de CAUCHY (voir exercice 89) pour étudier la nature de la série de terme général :

a) $u_n = \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$ ; b) $u_n = n^n a^{n^2}$ $(a \in \mathbb{R})$; c) $u_n = \left(\dfrac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$ ;

d) $u_n = a^n e^{-\sqrt{n}}$ $(a>0)$; e) $u_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{n\,\ell n\, n}$ ; f) $u_n = \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n^2}$ $(a>0, b>0)$.

**91.** Soit $[u_n]$ une série convergente de réels positifs.

a) Montrer que tout réel $\alpha > 1$, la série $\left[\dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right]$ converge.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha} \le \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$.(on pourra considérer : $\left(\sqrt{u_n} - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)^2$ ).

En déduire que la série $\left[\dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right]$ converge pour tout $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

c) Dans le cas où $\alpha = \dfrac{1}{2}$, donner un exemple de série $[u_n]$ convergente et telle que $\left[\dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{n}}\right]$ diverge.

**92.** Etant donné $A \in \mathbb{R}_+^*$, on pose, pour tout $n \geq 1$ : $u_n = \dfrac{1}{1+A} \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{A}{2}} \cdot \cdots \cdot \dfrac{1}{1+\dfrac{A}{n}}$.

1°) Montrer que si $A \leq 1$, la série $[u_n]$ diverge. On suppose désormais que : $A > 1$.

2°) On pose, pour tout $n \geq 1$ : $u'_n = n^A u_n$, $w_n = \ell n(u'_n)$ et $v_n = w_{n+1} - w_n$.

a) Montrer que la série $[v_n]$ converge.

b) Montrer alors que la suite $(u'_n)$ converge et a pour limite un réel strictement positif.

c) En déduire la nature de la série $[u_n]$.

**93.** Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs telle que la suite $(na_n)$ converge, et soit $B = \lim\limits_{n\to+\infty} n\, a_n$.

On considère une série $[u_n]_{n\geq 1}$ telle que, pour tout $n \geq 1$ :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1+a_n}.$$

1°) Montrer que si : $B > 1$, la série $[u_n]$ converge (indication : montrer que, pour n suffisamment grand : $a_n > \dfrac{B+1}{2n}$, et utiliser le résultat de l'exercice 92).

2°) Montrer que si : $B < 1$, ou si : $B = 1$ avec $n\, a_n \leq 1$ à partir d'un certain rang, alors la série $[u_n]$ diverge.

3°) <u>Application</u> : Etant donné $x \in \mathbb{R}_+^*$, étudier la série $[u_n]_{n\geq 1}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1.3.\cdots.(2n-1)}{2.4.\cdots.2n} x^{2n}.$$

**94.** Soit $[a_n]$ une série réelle vérifiant : i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$

ii) $a_0 > 0$

iii) La série $[a_n]$ est divergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $A_n$ la somme partielle d'ordre n de cette série, et on considère :

$b_n = \dfrac{a_n}{A_n}$.

1°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $0 \leq b_n < 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \ell n(1 - b_n)$ et $C_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$. Etablir que : $C_n = \ell n \dfrac{a_0}{A_n}$.

c) Quelle est la nature de la série $[c_n]$ ?

2°) On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$. Déduire de ce qui précède la nature de la série $[b_n]$.

3°) Peut-on conclure sur la nature de la série $[b_n]$ à partir des seules hypothèses i), ii), iii) ?

**95.** Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire pour la série $\left[\frac{1}{n}\right]_{n \geq 1}$, appelée série harmonique ?

b) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\ell n$, montrer que $\ell n(n+1) - \ell(n) \leq \frac{1}{n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire une minoration de $S_n$ et retrouver le résultat précédent.

**96.** Soit $\varphi$ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même. Montrer que la série $\left[\frac{\varphi(n)}{n^2}\right]_{n \geq 1}$ est divergente (Indication : minorer $S_{2n} - S_n$).

**97.** On considère une suite $(u_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$, muni de la norme euclidienne, et on suppose que cette suite est bornée. Etudier la convergence de la série $\left[\frac{1}{n!} u_n\right]$. Le cas échéant, majorer la norme de la somme.

**98.**. Soit $\vec{\omega}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, muni de la norme euclidienne, et la suite $(\overrightarrow{v_n})$ déterminée par son premier terme $\overrightarrow{v_0} = \vec{v}$ et la relation de récurrence : $\overrightarrow{v_{n+1}} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{v_n}$.

a) Montrer que la série $\left[\frac{1}{n!} \overrightarrow{v_n}\right]$ converge.

b) Soit $\vec{U}$ la somme de cette série. Préciser la nature de l'application : $\vec{v} \longrightarrow \vec{U}$.

**99.** K désigne indifféremment R ou C. Soit $\|.\|$ une norme sur $K^p$, et soit une norme sur $\mathcal{M}_p(K)$, encore notée $\|.\|$, qui est une norme matricielle subordonnée à la norme sur $K^p$, c'est-à-dire déterminée par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_p(K) \quad \|M\| = \sup_{X \in K^p - \{0\}} \frac{\|MX\|}{X} ;$$

On sait qu'elle vérifie, pour tous éléments M et N de $\mathcal{M}_p(K)$, $\|MN\| \leq \|M\| . \|N\|$.
Soit $A \in \mathcal{M}_p(K)$, telle que $\|A\| < 1$.

a) Montrer que la série $\left[A^n\right]$ est normalement convergente dans l'espace vectoriel $\left(\mathcal{M}_p(K), \|.\|\right)$.

b) Soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$. Montrer que $I_p - A$ est inversible, et a pour inverse S.

**100.** On désigne par E l'ensemble des suites $u=(u_n)$ de nombres complexes telles que la série $\left[|u_n|^2\right]$ converge. Pour une suite $u=(u_n)$ de E, on pose :

$$\|u\|=\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|^2}$$

a) Montrer que l'on définit ainsi une norme sur E.

b) A chaque suite $u=(u_n)$ de E, on associe la suite $v=(v_n)$ déterminée par : $v_0=0$ ; $\forall n\in N \quad v_n=u_{n-1}$. Montrer que $v\in E$. Soit f l'application de E dans lui-même qui à u associe v. Montrer que f est isométrique (pour tout $u\in E, \|f(u)\|=\|u\|$), mais n'est pas surjective.

c) Montrer que $(E,\|.\|)$ est complet.

d) Soit F l'ensemble des suites dont les termes sont tous nuls à partir d'un certain rang. Montrer que E est l'adhérence de F. F est-il complet ?

**101.** Critère de condensation de Cauchy

Soit $(u_n)$ une suite décroissante de réels positifs. On se propose d'établir que les séries $[u_n]$ et $\left[2^n\ u_{2^n}\right]_{n\geq 0}$ ont même nature.

a) Montrer que pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$2^k\ u_{2^{k+1}}\leq u_{2^k}+u_{2^k+1}+\ldots+u_{2^{k+1}-1}\leq 2^k\ u_{2^k}.$$

b) On désigne par $S_n$ et $T_n$ les sommes partielles de rang n des séries $[u_n]$ et $\left[2^n\ u_2 n\right]$. Déduire, de ce qui précède, que pour tout $n\in N$ : $\frac{1}{2}\left(T_{n+1}-u_1\right)\leq S_{2^{n+1}-1}\leq T_n$.

Conclure.

c) Application : $u_n=\frac{1}{n^\alpha}$ et $v_n=\frac{1}{n\left[\ell n(n)\right]^\beta}$ où α et β appartiennent à $\mathbf{R}_+^*$.

Retrouver la condition de convergence de la série $[u_n]$.

A quelle condition $[v_n]$ converge-t-elle ?

**102.** On note $M_n$ le R-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Si $A=(a_{ij})_{ij}$ on pose $\|A\|=\sup\limits_{i,j} n\left|a_{ij}\right|$.

a) Montrer que $\|.\|$ définit sur $M_n$ une norme telle que $\|AB\|\leq\|A\|.\|B\|$.

b) Montrer que la série de somme partielle $I+\frac{A}{1!}+\frac{A}{2!}+\ldots+\frac{A^n}{n!}$ converge absolument.

On note $e^A$ sa somme.

c) Vérifier les propriétés :

1) λ est valeur propre de A si et seulement si $e^\lambda$ est valeur propre de $e^A$.

2) $e^A$ est inversible et $\left(e^A\right)^{-1}=e^{-A}$.

3) Si AB = BA, alors $e^A.e^B=e^{A+B}=e^B.e^A$.

**103.** Soit $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle, de limite 0.

Que peut-on dire de la nature de la série $\left[\dfrac{\alpha_n \sin n}{n}\right]$ ?

**104.** Soit $[u_n]$ une série convergente de termes complexes.

Montrer que la série $\left[\dfrac{u_n}{n}\right]_{n\geq 1}$ converge.

**105.** Etudier suivant les valeurs de $\alpha > 0$ et pour $\theta \in R - 2\pi Z$ la convergence des séries $\left[\dfrac{\cos n\theta}{n^\alpha}\right]$ et $\left[\dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right]$.

**106.** Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n n \cos n}{n\sqrt{n} + \sin n}$.

a) Prouver que : $u_n = (-1)^n \dfrac{\cos n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^{3/2}} \varepsilon(n)$ avec $\varepsilon(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

b) Montrer que : $\left[\dfrac{1}{n^{3/2}} \varepsilon(n)\right]$ est convergente.

c) En déduire que $[u_n]$ est convergente.

**107.** Déterminer la nature de la série de terme général :

a) $\left[\dfrac{(-1)^{C_n^3}}{n}\right]_{n\in N^*}$ b) $\left[\dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{4n-3}{6}\pi\right)\right]$ c) $\left[\dfrac{\cos\dfrac{2n\pi}{3}}{n}\right]$

d) $\left[\dfrac{j^n}{n}\right]$ (on pourra regrouper les termes par 4 pour le a), par 3 pour le b) et c) et d)).

**108.** Soit la série définie à partir de la suite

$$\left(1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots\right)$$

Vérifier que $(u_n)$ converge vers 0, que $[u_n]$ diverge et qu'un regroupement de termes donne une série convergente.

**109.** La série $\left[\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\right]_{n\in N^*}$ converge et a pour somme $\ell n(2)$.

On considère alors la série $[v_n]$ obtenue à partir de la série précédente en changeant l'ordre des termes :

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \ldots, \frac{1}{2n+1}, -\frac{1}{2(2n+1)}, -\frac{1}{2(2n+2)} \ldots$$

En regroupant les termes 3 par 3, établir la convergence de cette série.
Quelle est sa somme ?

**110.**. A partir de la série convergente $\left[\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right]$, on forme une série $[u_n]$ en changeant l'ordre des termes :

$$1, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{4}}, \dots .$$

Montrer que $[u_n]$ diverge.

**111.** A partir de la série harmonique $\left[\dfrac{1}{n}\right]_{n\geq 1}$, on forme une nouvelle série dont on demande la nature.

a) On change le signe de 2 termes consécutifs en gardant le signe des 2 précédents

$$1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7} \dots$$

b) On supprime le premier terme, en gardant le second, puis on supprime deux termes à la suite en gardant le suivant, puis on supprime 3 termes à la suite en gardant le suivant ...

$$\frac{1}{2}, \cancel{\frac{1}{3}}, \cancel{\frac{1}{4}}, \frac{1}{5}, \cancel{\frac{1}{6}}, \cancel{\frac{1}{7}}, \cancel{\frac{1}{8}}, \frac{1}{9}, \cancel{\frac{1}{10}}, \dots$$

c) On écrit les trois termes consécutifs de dénominateur impair suivi d'un terme négatif de dénominateur pair :

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{13}, \frac{1}{15}, \dots$$

**112.** On se propose d'étudier la nature de la série $[v_n]_n$ déduite de la série harmonique $\left[\dfrac{1}{n}\right]$ en omettant tous les termes tels que dans l'écriture décimale de n figure le nombre 5.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{14}, \frac{1}{16} \dots$$

a) Dénombrer les ensembles de termes : compris entre 1 et $\dfrac{1}{9}$, entre $\dfrac{1}{10}$ et $\dfrac{1}{99}$ entre $\dfrac{1}{100}$ et $\dfrac{1}{999}$...

b) Majorer les sommes $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dots+\dfrac{1}{9}$ ; $\dfrac{1}{10}+\dots+\dfrac{1}{999}$ ...

d) Conclure quant à la nature de la série $[v_n]_n$.

**113.**. Soit la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}, n \geq 2$.

a) Est-elle une série alternée ?

b) Effectuer un regroupement de termes par 2 en posant : $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$. Conclure quant à la convergence de $[v_n]$ puis de $[u_n]$.

1

1) Enoncer la règle de d'Alembert puis la démontrer.

2) Donner la nature de la série $[U_n] = \left[e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$

3) Démontrer que la série $\left[\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right] = [u_n]$ CV

2

1) Enoncer le théorème sur les séries géométriques, puis démontrer le.

2) Donner la nature de la serie $\left[\frac{2^n}{n!}\right] = [u_n]$

3) Donner la nature de la série $[u_n] = \left[\cancel{\frac{1}{n^3\ln(n+1)}}\right]$ $\left[\frac{\ln n}{n^2}\right]$.

4) Soit la serie $[u_n] = \left[\int_0^1 t^n \sin(\pi t)\, dt\right]$

Calculer sa somme (pour cela déterminer $S_{n-1}$, puis considérer la fonction $\phi(t) = \frac{\sin \pi t}{1-t}$).