COLLE 01

COURS:

1) Donner: Définition de ln et exp. Donner $\sin^2(x)$ et $\cos^2(x)$ en fonction $\cos(2x)$.
2) Démonstration de :
Binôme de Newton, Formule de Pascal, Propriétés de la valeur absolue.

EXERCICE 1

Soient x et y des réels. Démontrer les inégalités suivantes :

1. $|x|+|y| \leq |x+y|+|x-y|$ **2**. $1+|xy-1| \leq (1+|x-1|)(1+|y-1|)$

3. $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}$.

EXERCICE 2

Résoudre l'équation $e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln\sqrt{x}}$.

EXERCICE 3

1. Développer $(x+1)^6$, $(x-1)^6$.
2. Démontrer que, pour tout entier n, on a $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$.
3. Démontrer que, pour tout entier n, on a $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}2^p = 3^n$.
4. Démontrer que, pour tout entier n, on a $\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k 2^{k-1} = 0$.
5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

EXERCICE 4

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Pour quels entiers $p \in \{0,\ldots,n-1\}$ a-t-on $\binom{n}{p} < \binom{n}{p+1}$.
2. Soit $p \in \{0,\ldots,n\}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $q \in \{0,\ldots,n\}$ a-t-on $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$?

EXERCICE 5

Résoudre l'inéquation $x-1 \leq \sqrt{x+2}$.

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+1|+|x-3| \leqslant 6$ **2**. $|x+12| \leq |x^2-8|$ **3**. $|\frac{1}{x}-2| \leq 3$

EXERCICE 7

Résoudre l'équation $\sqrt{x+\sqrt{x+a}} = a$ (où a est un nombre réel)

EXERCICE 8

Résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+2z & = & 3 \\ x+2y+z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

EXERCICE 9

A l'aide de la formule de Pascal, montrer que pour tout $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\leqslant n$, on a:

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$$

EXERCICE 10

1) Résoudre l'équation $\sin(\theta)=\sin(2\theta)$.
2) Résoudre l'inéquation $\sin(\theta)\geqslant\sqrt{3}\cos(\theta)$
Indication: on pourra passer du même côté puis utiliser une formule d'addition.
3) Résoudre l'inéquation $\sin^2(\theta)\leqslant\frac{1}{2}$.