COLLE 02

EXERCICE 1 - Nier des assertions avec quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
2. $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \implies x \leq 0$.
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

EXERCICE 2 - Du texte aux quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est constante;
2. f n'est pas constante;
3. f s'annule;
4. f est périodique.

EXERCICE 3

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

2. Soit $n \geq 2$. Calculer la somme $S = \sum_{k=2}^n \ln \left(\frac{k^2 - 1}{k^2} \right)$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère $S = \sum_{k=0}^{2n} \cos \left(\frac{k\pi}{2n} \right)$.

Grâce à un changement d'indice, montrer que $S = -S$, puis que $S = 0$.

4. Démontrer que, pour tout entier n , on a $\sum_{k=1}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k 2^{k-1} = 0$.

5. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k! \leq (n+1)!$

6. A l'aide de la formule de Pascal, montrer que pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq n$, on a :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$

EXERCICE 4

Résoudre l'inéquation $x - 1 \leq \sqrt{x+2}$.

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x + 1| + |x - 3| \leq 6$ 2. $|x + 12| \leq |x^2 - 8|$ 3. $|\frac{1}{x} - 2| \leq 3$

EXERCICE 6

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 7 - Corps de nombres

On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

1. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.
2. En déduire que si m, n, p et q sont des entiers relatifs, alors

$$m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \iff (m = p \text{ et } n = q).$$

EXERCICE 8 - Nombres dans un intervalle

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n + 1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[0, 1]$ vérifiant $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$. On veut démontrer par l'absurde la propriété suivante : il y a deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$.

1. Ecrire à l'aide de quantificateurs et des valeurs $x_i - x_{i-1}$ une formule logique équivalente à la propriété.
2. Ecrire la négation de cette formule logique.
3. Rédiger une démonstration par l'absurde de la propriété (on pourra montrer que $x_n - x_0 > 1$).
4. Donnez-en une preuve en utilisant le principe des tiroirs.

EXERCICE 9 - Pair/impair

Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

Si n^2 est impair, alors n est impair.

A-t-on démontré la proposition initiale?

EXERCICE 10 - Divisibilité par 8

Le but de cet exercice est de démontrer par contraposition la propriété suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

Si l'entier $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.

1. Ecrire la contraposée de la proposition précédente.
2. En remarquant qu'un entier impair n s'écrit sous la forme $n = 4k + r$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \{1, 3\}$ (à justifier), prouver la contraposée.
3. A-t-on démontré la propriété de l'énoncé?

EXERCICE 7 - Un exemple avec de l'arithmétique

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}, (p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. f est-elle injective, surjective?

EXERCICE 8 - Un exemple avec des fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective? surjective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], g(x) = f(x)$ est une bijection.

EXERCICE 9 - Un exemple avec des fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1 + x^2)$.

1. f est-elle injective? surjective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], g(x) = f(x)$ est une bijection.

EXERCICE 10 - Calcul de la réciproque

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1} .

EXERCICE 11 - Composition et injectivité

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les fonctions f et g sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

EXERCICE 12 - Encore des exemples

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$.
2. $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$.