COLLE 03

Exercice 1

Calculer les intégrales suivantes :

$$\textbf{1}. \quad I = \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2} dt \qquad \textbf{2}. \quad K = \int_0^1 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx$$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+e^t}$
2. $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt$
3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, Résoudre sur $]0;+\infty[$, l'équation différentielle $xy' - y = x^n$
2. Vérifier que pour $n \neq 1$, toutes les solutions peuvent se prolonger en une fonction dérivable sur $[0;+\infty[$ (on précisera la valeur en 0 des prolongements).
   Qu'en est-il pour $n = 1$?

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les solutions à valeurs réelles de l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt)$$

Exercice 5

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la solution de l'équation différentielle:

$$(n+1)y'' - (2n+1)y' + ny = 0$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

1. Expliciter $t \mapsto f_n(t)$.
2. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, donner une solution de $(n+1)y'' - (2n+1)y' + ny = e^{\alpha t}$

Exercice 6

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \frac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}$;
2. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1, +\infty[$;
3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$ sur $]0, +\infty[$;
4. $y' - 2xy = -(2x-1)e^x$ sur $\mathbb{R}$;
5. $y' - \frac{2}{t}y = t^2$ sur $]0, +\infty[$;

Exercice 7

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y = e^{2x} - e^x$;
2. $y'' + y' + y = \cos(x)$;
3. $y'' - 2y' + y = \sin^2 x$;
4. $y'' + y' + y = e^x \cos(x)$.

Exercice 8 - Un exemple avec de l'arithmétique

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p, q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. f est-elle injective, surjective?

Exercice 9 - Un exemple avec des fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective? surjective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 10 - Un exemple avec des fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective? surjective?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 11 - Calcul de la réciproque

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective. Calculer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 12 - Composition et injectivité

Soient f et g les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par $f(x) = 2x$ et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } x \text{ est impair.} \end{cases}$$

Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les fonctions f et g sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

Exercice 13 - Encore des exemples

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n + 1.$
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n + 1.$
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - y).$