

COLLE 05

EXERCICE 1 - Un encadrement de e

Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

EXERCICE 2 - Positivité

Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = (x - 2)e^x + (x + 2)$. Démontrer que $g \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 3 - Limites et croissances comparées

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.} \ln(x) - e^x & \mathbf{2.} \frac{x^3}{\exp(\sqrt{x})} \\ \mathbf{3.} \frac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}} & \mathbf{4.} \frac{\exp(\sqrt{x})+1}{\exp(x^2)+1}. \end{array}$$

EXERCICE 4 - Tangente à la courbe représentative du logarithme

Y-a-t-il un point de la courbe représentative du logarithme tel que la tangente à cette courbe représentative passant par ce point passe par l'origine?

EXERCICE 5 - Inégalités

Démontrer que, pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

EXERCICE 6 - Système d'équations

Résoudre les systèmes d'équations suivantes :

$$\mathbf{1.} \begin{cases} x + y = 30 \\ \ln(x) + \ln(y) = 3 \ln 6 \end{cases} \quad \mathbf{2.} \begin{cases} x^2 + y^2 = 218 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(91) \end{cases}$$

EXERCICE 7 - Surpuissante!

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto x^x$. Étudier les variations de cette fonction et ses limites aux bornes.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre de solutions de l'équation $y = x^x$, d'inconnue $x > 0$?

EXERCICE 8 - Équation

Résoudre l'équation $\cosh(x) = 2$.

EXERCICE 9 - Valeur exacte

Calculer

$$\arccos\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos \frac{-2\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\cos \frac{4\pi}{3}\right), \quad \arccos\left(\sin \frac{17\pi}{5}\right).$$

EXERCICE 10 - Étude d'une fonction

Soit f la fonction $x \mapsto \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Donner son domaine de définition, son domaine de dérivabilité, puis étudier et tracer la fonction.

EXERCICE 11 - Forme algébrique, le retour

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\mathbf{1.} z_1 = (2 + 2i)^6 \quad \mathbf{2.} z_2 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20} \quad \mathbf{3.} z_3 = \frac{(1 + i)^{2000}}{(i - \sqrt{3})^{1000}}.$$

EXERCICE 12 - Racines n -ièmes

Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.} z^3 = 1 + i\sqrt{3} & \mathbf{2.} z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} \\ \mathbf{3.} z^5 = \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2}. \end{array}$$

EXERCICE 13 - Un calcul d'intégrale

Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin^2 t dt$.