

## COLLE 08

EXERCICE 1 - Puissance  $n$ -ième, par récurrence

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A^2$ ,  $A^3$ . En déduire la valeur de  $A^n$  pour tout  $n \geq 1$ . Répondre aux mêmes questions pour  $B$ .

EXERCICE 2 - Puissance  $n$ -ième - avec la formule du binôme

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer  $B^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En déduire  $A^n$ .

EXERCICE 3 - Inverser une matrice sans calculs!

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A^2 = 2I_3 - A$ , en déduire que  $A$  est inversible et calculer  $A^{-1}$ .

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^3 - A$ . En déduire que  $A$  est inversible puis déterminer  $A^{-1}$ .

3. Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calculer  $A^2 - 3A + 2I_3$ . En déduire que  $A$  est inversible, et calculer  $A^{-1}$ .

EXERCICE 4 - Inverse avec calculs!

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 5 - Grand inverse

Démontrer que la matrice suivante est inversible, et calculer son inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 6 - Des exemples

Les ensembles suivants sont-ils majorés? minorés? Si oui, déterminer leur borne inférieure, leur borne supérieure.

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x^2 < 2\} \quad B = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
$$C = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}; p, n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

EXERCICE 7 - Atteint ou non?

Les parties de  $\mathbb{R}$  suivantes sont elles-minorées, majorées? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1}; (m, n) \in \mathbb{N}^{*2} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{mn+1}; (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

EXERCICE 8 - Partie entière et somme

Soient  $a, b$  deux réels. Prouver que

$$[a] + [b] \leq [a + b] \leq [a] + [b] + 1.$$

EXERCICE 9 - Une somme

Calculer  $\sum_{k=1}^{2010} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$ .