

COLLE 09

EXERCICE 1 - Vrai/Faux

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
6. Si (u_n) est positive et tend vers 0, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

EXERCICE 2 - Suite convergente à valeurs dans \mathbb{Z}

Soit (u_n) une suite à valeurs dans \mathbb{Z} , convergente. Montrer, en utilisant la définition, que (u_n) est stationnaire.

EXERCICE 3 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{\sin(n) + 3 \cos(n^2)}{n^3 + 5n} & 2. u_n = \frac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}} \\ 3. u_n = \frac{\sqrt{n}}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)} & 4. u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1} \\ 5. u_n = 3^n e^{-3n}. & \end{array}$$

EXERCICE 4 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \ln(2n^2 - n) - \ln(3n + 1) & 2. u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} \\ 3. u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}, a, b \in]0, +\infty[& 4. u_n = \frac{\ln(n + e^n)}{n} \\ 5. u_n = \frac{\ln(1 + \sqrt{n})}{\ln(1 + n^2)}. & \end{array}$$

EXERCICE 5 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

$$\begin{array}{ll} 1. u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2} & 2. u_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n) \\ 3. u_n = \sqrt{n} \ln\left(\frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} - 1}\right) & \end{array}$$

EXERCICE 6 - Radicaux itérés

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1 + \sqrt{\dots + \sqrt{1}}}}$.

1. Écrire une formule de récurrence liant u_{n-1} et u_n .

2. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.
3. Déterminer sa limite.

EXERCICE 7 - Somme télescopique

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{a}{k - 1} + \frac{b}{k + 1}.$$

2. En déduire la limite de la suite

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}.$$

3. Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite

$$v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + 3k + 2}.$$

EXERCICE 8

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}$

1. Montrer que pour tout n , $u_n \geq 1$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Prouver que (u_n) diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 9

Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \quad ; \quad v_n = \frac{u_{n-1} + 2v_{n-1}}{3}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > u_n$.
2. Prouver que (u_n) est monotone croissante et (v_n) monotone décroissante.
3. Prouver que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.
4. Interpréter géométriquement le résultat.

EXERCICE 10

Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $0 < v_0 < u_0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

1. Démontrer par récurrence que :
 - (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n v_n$.
 - (b) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.