COLLE 10

Cours:
1) Enoncer le théorème de Bolzano Weierstrass.
2) Démontrer que toute suite croissante majorée converge.

Exercice 1 - Vrai/Faux

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
2. Si (u_n) est positive et tend vers 0, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

1. Montrer que pour tout n, $u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Montrer que (u_n) ne peut pas être majorée.
4. Prouver que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 3 - Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs, tels que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1. On suppose que (v_n) converge vers 0. Montrer que (u_n) converge aussi vers 0.
2. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de (v_n)?

COLLE 10

Cours:

1) Donner la définition d'une suite extraite.
2) Démontrer la convergence de deux suites adjacentes.

Exercice 1 - Vrai/Faux

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.

Exercice 2

Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \quad ; \quad v_n = \frac{u_{n-1} + 2v_{n-1}}{3}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > u_n$.
2. Prouver que (u_n) est monotone croissante et (v_n) monotone décroissante.
3. Prouver que (u_n) et (v_n) converge vers la même limite.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n}$

1. Montrer que $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{2n}$
2. En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.
3. Déterminer la limite de $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$.

COLLE 10

Cours:
1) Donner la définition d'une suite convergente avec des quantificateurs.
2) Démontrer l'unicité de la limite.

Exercice 1 - Vrai/Faux

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.

Exercice 2

Déterminer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$$

Exercice 3

Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $0 < v_0 < u_0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant v_n$.
2. Démontrer que (u_n) est décroissante et (v_n) est croissante.
3. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 1 - Vrai/Faux

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Lorsqu'elles sont vraies, les démontrer. Lorsqu'elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
2. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
3. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
4. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
5. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) tend vers $+\infty$.
6. Si (u_n) est positive et tend vers 0, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang.

Exercice 2 - Suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$, convergente. Montrer, en utilisant la définition, que (u_n) est stationnaire.

Exercice 3 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}$ **2.** $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$

3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$ **4.** $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}$

5. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

Exercice 4 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \ln\left(2n^2 - n\right) - \ln(3n+1)$ **2.** $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1}$

3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n},\ a, b \in]0, +\infty[$ **4.** $u_n = \dfrac{\ln(n + e^n)}{n}$

5. $u_n = \dfrac{\ln(1+\sqrt{n})}{\ln(1+n^2)}$.

Exercice 5 - Nature

Étudier la nature des suites suivantes, et déterminer leur limite éventuelle :

1. $u_n = \dfrac{\ln(n!)}{n^2}$ **2.**$u_n = e^{-\sqrt{n}} \ln(1 + n + e^n)$

3. $u_n = \sqrt{n} \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)$

Exercice 6 - Radicaux itérés

Soit $u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\cdots + \sqrt{1}}}}$.

1. Écrire une formule de récurrence liant u_{n-1} et u_n.
2. Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.

3. Déterminer sa limite.

EXERCICE 7 - Somme télescopique

1. Déterminer deux réels a et b tels que
$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k+1}.$$
2. En déduire la limite de la suite
$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}.$$
3. Sur le même modèle, déterminer la limite de la suite
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+3k+2}.$$

EXERCICE 8

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}$

1. Montrer que pour tout n, $u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Prouver que (u_n) diverge vers $+\infty$.

EXERCICE 9

Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que :
$$u_n = \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} \quad ; \quad v_n = \frac{u_{n-1}+2v_{n-1}}{3}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > u_n$.
2. Prouver que (u_n) est monotone croissante et (v_n) monotone décroissante.
3. Prouver que (u_n) et $v_n)$ converge vers la même limite.
4. Interpréter géométriquement le résultat.

EXERCICE 10

Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $0 < v_0 < u_0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par:
$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$$

1. Démontrer par récurrence que :
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_nv_n$.
   (b) (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
2. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

EXERCICE 11 - Fonction croissante - sans indication

Étudier les suites récurrentes suivantes :

1. $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$;
2. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$. Que se passe-t-il si on choisit $u_0 = 2$?