COLLE 11

Cours:

1) Rappeler le taux de variation d'une fonction et sa limite lorsqu'elle existe
2) Démontrer que toute suite croissante majorée converge.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

1. Montrer que pour tout n, $u_n \geqslant 1$.
2. Montrer que (u_n) est croissante.
3. Montrer que (u_n) ne peut pas être majorée.
4. Prouver que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 2 - Non continue et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que la fonction f n'est pas continue en 0.

Exercice 3 - Comparaison logarithmique

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs, tels que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1. On suppose que (v_n) converge vers 0. Montrer que (u_n) converge aussi vers 0.
2. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de (v_n)?

COLLE 11

Cours:

1) Rappeler la définition d'une fonction paire, d'une fonction impaire et d'une fonction périodique.
2) Démontrer la convergence de deux suites adjacentes.

Exercice 1

Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \quad ; \quad v_n = \frac{u_{n-1} + 2v_{n-1}}{3}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n > u_n$.
2. Prouver que (u_n) est monotone croissante et (v_n) monotone décroissante.
3. Prouver que (u_n) et (v_n) converge vers la même limite.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie $l < 1$ en $+\infty$. Démontrer que f admet un point fixe.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par :

$u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{n + 1 + u_n}$

1. Montrer que $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n+1}$
2. En déduire que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est bornée.
3. Déterminer la limite de (u_n).

COLLE 11

Cours:
Rappeler le théorème de limite séquentielle et le démontrer.

EXERCICE 1

Déterminer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2}$$

EXERCICE 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$. Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

Soient u_0 et v_0 deux réels tels que $0 < v_0 < u_0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$$

1. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n v_n$.

2. Démontrer que (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

3. Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

COLLE 11

Exercice 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs, tels que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

1. On suppose que (v_n) converge vers 0. Montrer que (u_n) converge aussi vers 0.
2. On suppose que (u_n) tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de (v_n)?

Exercice 2

Étudier la suite récurrente suivante :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Que se passe-t-il si on choisit $u_0 = 2$?

Exercice 3

Étudier la suite récurrente suivante :

$u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$

Exercice 4 - Non continue et vérifie pourtant la propriété des valeurs intermédiaires

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que la fonction f n'est pas continue en 0.
2. On souhaite prouver que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que pour tous réels $a < b$, et pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $y = f(c)$.
   (a) Traiter le cas $a > 0$.
   (b) Si $a = 0$, justifier l'existence de $d \in]a, b[$ tel que $f(d) = f(0)$. Conclure.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue. On suppose que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet une limite finie $l < 1$ en $+\infty$. Démontrer que f admet un point fixe.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{-\infty} f = \lim_{+\infty} f = +\infty$. Démontrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7 - Calcul de limites

Étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$ en 1	**2.** $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ en 1
3. $\dfrac{x^3+x+5}{5x^3+7x^2+8}$ en $+\infty$	**4.** $\sqrt{x^2+2x} - x$ en $+\infty$
5. $x^5 e^{-x^2}$ en $+\infty$	**6.** $\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$ en $+\infty$
7. $\dfrac{x\ln x+7}{x^2+4}$ en $+\infty$	**8.** $\dfrac{4\sin^2 x+3\cos(5x)}{x}$ en $+\infty$.

Exercice 8 - Calculs de limites

Étudier les limites suivantes :

1. $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^{x}+e^{-x}}$ en $+\infty$

2. $\dfrac{\sqrt{1+x}-\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x^2}$ en 0

3. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$ en $+\infty$

4. $\dfrac{\sqrt{2x^2+5x+9}-3}{x}$ en 0

5. $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}$ en $+\infty$