

COLLE 12

EXERCICE 1 - Une relation de divisibilité

Déterminer les entiers relatifs n tels que $n - 4$ divise $3n - 17$.

EXERCICE 2 -

Soit $n \geq 1$ un entier. Déterminer le reste dans la division euclidienne par n de la somme des n premiers entiers.

EXERCICE 3 - Des équations de Bezout

Résoudre les équations suivantes dans \mathbb{Z}^2 :

1. $2x + 5y = 3$;
2. $323x - 391y = 612$;
3. $162x + 207y = 27$;
4. $221x + 247y = 15$.

EXERCICE 4 - Pas de solutions rationnelles

Montrer que l'équation $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solutions dans \mathbb{Q} .

EXERCICE 5 - pgcd et ppcm imposés

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x \vee y = 540 \end{cases}$$

avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

2. Généralisation : trouver une condition nécessaire et suffisante sur d et m pour qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x \wedge y = d$ et $x \vee y = m$.

EXERCICE 6 - Nombres de Fermat

1. Soit q un entier impair. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^q + 1 = (x + 1)(x^{q-1} - x^{q-2} + \dots + 1).$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier. Montrer que $m = 2^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 7 - Nombres de Mersenne

Soient $a, n \geq 2$ des entiers.

1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. On note $M_n = 2^n - 1$ le n -ième nombre de Mersenne. Vérifier que M_{11} n'est pas premier.

EXERCICE 8 - Puissances itérées

1. Déterminer, suivant les puissances de $n \in \mathbb{N}$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
2. Quel est le reste de la division par 5 de 1357^{2013} ?

EXERCICE 9 - Nombres palindromes

Un nombre palindrome est un nombre qui se lit indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple, 2002, 12321 sont des nombres palindromes. Prouver qu'un nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres est divisible par 11