

COLLE 13

EXERCICE 1 - Quelques équations

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

1. $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$
2. $P'^2 = 4P$
3. $P \circ P = P$.

EXERCICE 2 - En pratique!

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

EXERCICE 3 -

Quel est le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n - X^n - 1$ par

1. $X^2 - 3X + 2$
2. $X^2 + X + 1$
3. $X^2 - 2X + 1$?

EXERCICE 4 - Équation de Bezout

Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$, où $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 - 1$.

EXERCICE 5 - Ordre de multiplicité

Quel est, pour $n \geq 1$, l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (4n + 1)X^{n+1} + 4(n + 1)X^n - 4X^{n-1}?$$

EXERCICE 6 - Décomposer!

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $X^4 + 1$
2. $X^8 - 1$
3. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$

EXERCICE 7 - pgcd et ppcm imposés

1. Résoudre le système

$$\begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x \vee y = 540 \end{cases}$$

avec $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

2. Généralisation : trouver une condition nécessaire et suffisante sur d et m pour qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x \wedge y = d$ et $x \vee y = m$.

EXERCICE 8 - Nombres de Fermat

1. Soit q un entier impair. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^q + 1 = (x + 1)(x^{q-1} - x^{q-2} + \dots + 1).$$

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^m + 1$ soit premier. Montrer que $m = 2^n$, où $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 9 - Nombres de Mersenne

Soient $a, n \geq 2$ des entiers.

1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. On note $M_n = 2^n - 1$ le n -ième nombre de Mersenne. Vérifier que M_{11} n'est pas premier.