

COLLE 15

EXERCICE 1 - C^1 ou pas C^1 ?

Étudier si les fonctions suivantes sont dérivables et C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

EXERCICE 2 - Suite presque harmonique

1. Démontrer que pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}.$$

2. On pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Démontrer que

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) < v_n < \ln(2n) - \ln n.$$

En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.

EXERCICE 3 - Un grand classique!

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout $x > 0$, on a $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n(1/x)$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 - Calcul de dérivée n -ième

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la dérivée d'ordre $n+1$ de $x^n e^{1/x}$ est

$$\frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}.$$

EXERCICE 5 - Raccordement

Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de sorte que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \text{ et } f(x) = ax^2 + bx + 1 \text{ si } x > 1$$

soit dérivable en 1.

EXERCICE 6 - Polynômes

Déterminer la dérivée d'ordre n de la fonction f définie par $f(x) = (x-a)^n(x-b)^n$ (a, b sont des réels). En étudiant le cas $a = b$, trouver la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

EXERCICE 7 - Un problème de tangente

Démontrer que les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = 1/x$ admettent une unique tangente commune.

EXERCICE 8 - Quelques équations

Résoudre les équations suivantes, où l'inconnue est un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{1.} & P(X^2) = (X^2 + 1)P(X) \\ \mathbf{2.} & P'^2 = 4P \\ \mathbf{3.} & P \circ P = P. \end{array}$$

EXERCICE 9 - En pratique!

Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de

1. $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$;
2. $X^4 - 4X^3 - 9X^2 + 27X + 38$ par $X^2 - X - 7$;
3. $X^5 - X^2 + 2$ par $X^2 + 1$.

EXERCICE 10 -

Quel est le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n - X^n - 1$ par

$$\mathbf{1.} X^2 - 3X + 2 \quad \mathbf{2.} X^2 + X + 1 \quad \mathbf{3.} X^2 - 2X + 1?$$

EXERCICE 11 - Équation de Bezout

Trouver deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = 1$, où $A(X) = X^7 - X - 1$ et $B(X) = X^5 - 1$.

EXERCICE 12 - Ordre de multiplicité

Quel est, pour $n \geq 1$, l'ordre de multiplicité de 2 comme racine du polynôme

$$P_n(X) = nX^{n+2} - (4n + 1)X^{n+1} + 4(n + 1)X^n - 4X^{n-1}?$$

EXERCICE 13 - Décomposer!

Décomposer en produits d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

$$\mathbf{1.} X^4 + 1 \quad \mathbf{2.} X^8 - 1 \quad \mathbf{3.} (X^2 - X + 1)^2 + 1$$