

COLLE 16

EXERCICE 1 - Pôles et racines

Soient p et q deux entiers naturels premiers entre eux. Déterminer les racines et les pôles de $(X^p - 1)/(X^q - 1)$, en précisant leur ordre de multiplicité.

EXERCICE 2 - PrIMITIVE de $1/X$

Soit $F = P/Q \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle, avec $P \wedge Q = 1$, telle que $F' = 1/X$.

1. Démontrer que $X|Q$.
2. Soit $n \geq 1$ tel que $X^n|Q$. Démontrer que $X^n|Q'$.
3. Conclure.

EXERCICE 3 - En pratique

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1.	$\frac{1}{X^3 - X}$	2.	$\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$	3.	$\frac{X^3}{(X - 1)(X - 2)(X - 3)}$
4.	$\frac{2X^2 + 1}{(X^2 - 1)^2}$	5.	$\frac{X^3 + 1}{(X - 1)^3}$	6.	$\frac{X^4 + 1}{(X + 1)^2(X^2 + 1)}$

EXERCICE 4 - Avec paramètres

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1.	$\frac{1}{X^n - 1}$	2.	$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$	3.	$\frac{1}{(X - 1)(X^n - 1)}$
----	---------------------	----	---------------------------	----	------------------------------

EXERCICE 5 - Un calcul de somme

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X + 1)(X + 2)}$.
2. En déduire la limite de la suite (S_n) suivante : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k + 1)(k + 2)}$.

EXERCICE 6 - Un calcul de somme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n \geq 1$ possédant n racines distinctes x_1, \dots, x_n non-nulles.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{XP(X)}$.

2. En déduire que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = \frac{-1}{P(0)}$.

EXERCICE 7 - Polynôme et dérivé

1. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{P'}{P}$, où P est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

2. En déduire les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P'|P$.