# COLLE 17

**Exercice 1 - Deux par deux, et par trois?**

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 4)$ et $v_3 = (2, -1, 4)$.

1. Montrer que la famille $(v_1, v_2)$ est libre. Faire de même pour $(v_1, v_3)$, puis pour $(v_2, v_3)$.
2. La famille $(v_1, v_2, v_3)$ est-elle libre?

**Exercice 2 - Complétion de familles libres**

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 1),\ v_2 = (2, -2, 2),\ v_3 = (2, -1, 2).$$

1. Peut-on trouver un vecteur $w$ tel que $(v_1, v_2, w)$ soit libre? Si oui, construisez-en un.
2. Même question en remplaçant $v_2$ par $v_3$.

**Exercice 3 - Polynômes à degrés échelonnés**

Soit $(P_1, \dots, P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls, à degrés échelonnés, c'est-à-dire $\deg(P_1) < \deg(P_2) < \cdots < \deg(P_n)$. Montrer que $(P_1, \dots, P_n)$ est une famille libre.

**Exercice 4 - Où sont les supplémentaires?**

On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants : $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 1, 0, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$ et $v_5 = (0, 1, 0, 1)$. Dire si les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{vect}(v_1, v_2)$ et $\text{vect}(v_3)$?
2. $\text{vect}(v_1, v_2)$ et $\text{vect}(v_4, v_5)$?
3. $\text{vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{vect}(v_2, v_5)$?
4. $\text{vect}(v_1, v_4)$ et $\text{vect}(v_3, v_5)$?

**Exercice 5 - Par deux, mais par trois?**

Soit $E = \mathbb{R}^4$. On considère $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ une famille libre de $E$ et on pose

$$F = \text{vect}(u_1 + u_2, u_3),\ G = \text{vect}(u_1 + u_3, u_4),\ H = \text{vect}(u_1 + u_4, u_2).$$

Démontrer que $F \cap G = \{0\}$, que $F \cap H = \{0\}$ et que $G \cap H = \{0\}$. La somme $F + G + H$ est-elle directe?

Exercice 6 - Avec des suites

Soit $E$ l'espace vectoriel des suites réelles,

$$F = \{u \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = 0\}$$

$$G = \{u \in E;\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que $F$ et $G$ sont supplémentaires.

Exercice 7 - Trouver un supplémentaire!

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non-nul et $F = \{P \in \mathbb{R}[X];\ A \text{ divise } P\}$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et trouver un supplémentaire à $F$.

Exercice 8

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$.

1. Calculer la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$.
2. Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 9

Soit $f(x) = \frac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in ]1, +\infty[$.

1. Décomposer en éléments simple la fraction rationnelle

$$\frac{5X^2 + 21X + 22}{(X-1)(X+3)^2}$$

2. En déduire la primitive de $f$ sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 10

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)}$.
2. En déduire la limite de la suite $(S_n)$ suivante : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.