# COLLE 20

Exercice 1 - Applications linéaires ou non (sur $\mathbb{R}^n$)?

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 0)$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y, 1)$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Exercice 2 - Applications linéaires ou non (sur les polynômes)?

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}^2,\ P \mapsto \big(P(0), P'(1)\big)$;
2. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto AP$, où $A \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme fixé;
3. $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ P \mapsto P^2$.

Exercice 3 - Applications linéaires ou non (espace de fonctions)?

Soit $E$ l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires :

1. $\phi_1 : E \to E,\ \phi_1(f)(x) = (f(x))^2$;
2. $\phi_2 : E \to E,\ \phi_2(f)(x) = (f(x^2))$;
3. $\phi_3 : E \to E,\ \phi_3(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$;

Exercice 4 - Noyau et image

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y) = (x + y, x - y, x + y).$$

Déterminer le noyau de $f$, son image. $f$ est-elle injective? surjective?

Exercice 5 - Noyau et image

On considère l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x, y, z) = (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z).$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. L'application $f$ est-elle injective? surjective?

Exercice 6 - Application linéaire donnée par l'image d'une base

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $E$ et $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3\ , u(e_2) = 3e_2\ , u(e_3) = -4e_1 + 4e_3.$$

1. Déterminer une base de ker $u$. $u$ est-il injectif? peut-il être surjectif? Pourquoi?
2. Déterminer une base de Im $u$. Quel est le rang de u ?
3. Montrer que $E = \ker\ u \bigoplus \mathrm{Im}\ u$.

Exercice 7 - Expression analytique d'une projection, d'une symétrie

Soit $F$ et $G$ les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x+2y+z=0\} \\ G &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x=-y=-z\}. \end{aligned}$$

1. Démontrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
2. Donner l'expression analytique de la projection $p$ sur $F$ parallèlement à $G$ (c'est-à-dire donner une formule explicite $p(x,y,z) = (\dots)$).
3. Donner l'expression analytique de la symétrie $s$ par rapport à $F$ parallèlement à $G$.

Exercice 8 - Projection ou symétrie

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (2x-2z, y, x-z)$. $f$ est-elle une symétrie? une projection? Déterminer une base de ses éléments caractéristiques.

Exercice 9 - Une projection dans $\mathbb{R}[X]$

Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul, et $\phi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application qui à un polynôme $P$ associe son reste dans la division euclidienne par $A$. Démontrer que $\phi$ est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 10 - Somme de deux projecteurs

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $p$ et $q$ deux projecteurs de $E$.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que, dans ce cas, on a $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$ et $\ker(p+q) = \ker p \cap \ker q$.

Exercice 11 - Avez-vous compris ce qu'étaient le noyau et l'image?

Soient $E, F, G$ trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Démontrer que

$$g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im} f \subset \ker g.$$

Exercice 12 - Endomorphisme nilpotent et famille libre

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel qu'il existe $n \geq 1$ vérifiant $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ soit libre.

Exercice 13 -

Soit $E$ un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que
$$\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathrm{Im} f \cap \ker(f) = \{0\}.$$
2. On suppose que $E$ est de dimension finie. Montrer que
$$\ker(f) = \ker(f^2) \iff \mathrm{Im} f \oplus \ker(f) = E \iff \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$