

COLLE 22

EXERCICE 1 - Quotient de DLs

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0
2. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0
3. $\frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0
4. $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

EXERCICE 2 - DLs pas en 0!

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2
2. $\ln(x)$ à l'ordre 3 en 2
3. e^x à l'ordre 3 en 1
4. $\cos(x)$ à l'ordre 3 en $\frac{\pi}{3}$
5. $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2

EXERCICE 3 - DL en l'infini

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$
2. $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

EXERCICE 4 - Limites de fonctions

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\frac{\sin x - x}{x^3}$ en 0;
2. $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$ en 0;
3. $\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$ en 0;
4. $\frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0;
5. $\frac{\exp(\sin x) - \exp(\tan x)}{\sin x - \tan x}$ en 0;
6. $\frac{x^{x^x} \ln x}{x^x - 1}$ en 0^+ ;

EXERCICE 5 - Étude locale d'une courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en zéro.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

EXERCICE 6 - Asymptotes

Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent une asymptote dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position de la courbe par rapport à son asymptote.

1. $f(x) = \frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\cosh x - 1}$
2. $g(x) = x^2 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$
3. $h(x) = \frac{x+1}{1 + \exp(1/x)}$
4. $u(x) = x \exp\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)$