

COLLE 23

EXERCICE 1 - AL-1

Soient $\{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1 = (1, -2, 0)$, $w_2 = (-1, 2, 0)$, $w_3 = (0, 0, 2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1) = w_1, u(\mathcal{E}_2) = w_2, u(\mathcal{E}_3) = w_3.$$

- (a) Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$. En déduire la matrice de u dans la base canonique.
(b) Soit $W = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $u(W)$.
- (a) Trouver une base de $\ker(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.
(b) Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker(u) \oplus \text{Im}(u)$.
- Déterminer $\ker(u - Id)$ et $\text{Im}(u - Id)$ où Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $u - Id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE 2 - AL-2

Soit $E = \mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B} = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1) = -2\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_3, u(\mathcal{E}_2) = 3\mathcal{E}_2, u(\mathcal{E}_3) = -4\mathcal{E}_1 + 4\mathcal{E}_3.$$

- Écrire la matrice de u dans la base canonique.
- Déterminer une base de $\ker u$. u est-il injectif? peut-il être surjectif? Pourquoi?
- Déterminer une base de $\text{Im } u$. Quel est le rang de u ?
- Montrer que $E = \ker u \oplus \text{Im } u$.

EXERCICE 3 - Donnée par une matrice

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$.

EXERCICE 4 - Réduction

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\text{Im}(f)$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

EXERCICE 5 - Avec un paramètre

Déterminer, suivant la valeur du réel a , le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

EXERCICE 6 - Surjective?

Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha, \beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha, \beta}$ est surjective.

EXERCICE 7 - Deux matrices semblables

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. Le but de l'exercice est de démontrer que M et

D sont semblables. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M .

1. Démontrer qu'il existe $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{vect}(u_1) = \ker(f - Id)$. De même, prouver l'existence de $u_2, u_{-4} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\text{vect}(u_2) = \ker(f - 2Id)$ et $\text{vect}(u_{-4}) = \ker(f + 4Id)$.
2. Démontrer que (u_1, u_2, u_{-4}) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Conclure.

EXERCICE 8 - Application linéaire définie sur les matrices

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

EXERCICE 9 - Matrice d'une projection

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z = x - y$ et D la droite d'équation $x = -y = z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .

EXERCICE 10 - Base adaptée à un endomorphisme dont le carré est nul

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$.

1. Démontrer que $\dim(\ker(f)) = 2$.
2. En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.