

COLLE 24, FEUILLE 1

Exercice 1:

Soit $f(x) = \frac{5x^2 + 21x + 22}{(x-1)(x+3)^2}$, $x \in]1, +\infty[$.

1. Démontrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que

$$\forall x \in]1, +\infty[, f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}.$$

2. En déduire la primitive de f sur $]1, +\infty[$ qui s'annule en 2.

Exercice 2:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathbf{1.} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(t)}{1 + \cos^2 t} dt \quad \mathbf{2.} \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin^2 x dx$$

Exercice 3:

On note, pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

Soit également $\alpha \in [0, 1[$.

1. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{\alpha}{1+\alpha^n} \leq I_n \leq 1$$

(on pourra encadrer $\int_0^\alpha$ puis $\int_\alpha^1$).

2. Démontrer que (I_n) est croissante.
3. Déduire des questions précédentes que (I_n) converge vers 1.

COLLE 24, FEUILLE 2

Exercice 1:

Donner une primitive de la fonctions suivante :

$$x \mapsto \frac{2x}{x^2 - x + 1}$$

Exercice 2:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathbf{2.} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} \quad \mathbf{3.} \int_0^{\pi} x^2 e^x \cos x dx$$

Exercice 3:

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}.$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire la valeur de I_3 .

COLLE 24, FEUILLE 3

Exercice 1:

Donner une primitive de la fonction suivante :

$$x \mapsto \frac{3x+2}{x^2+x+1}$$

Exercice 2:

Calculer les intégrales suivantes :

$$\mathbf{3.} \int_0^{\pi/3} (1 + \cos(x)) \tan(x) dx. \quad \mathbf{1.} \int_0^1 e^x (2x^3 + 3x^2 - x + 1) dx$$

Exercice 3:

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que si $\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}$, alors f admet au moins un point fixe dans $[0, 1]$.

Exercice 4:

On se propose de calculer $I = \int_1^{5/2} \sqrt{-x^2 + 2x + 8} dx$.

1. Mettre le trinôme sous forme canonique.
2. En effectuant deux changements de variable, calculer la valeur de I .