COLLE 25

Exercice 1 - Limites de suites

Calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\dfrac{2\pi}{n}\right) + \dots + \sin\left(\dfrac{n\pi}{n}\right)\right)$.
2. $u_n = n\left(\dfrac{1}{(n+1)^2} + \dots + \dfrac{1}{(n+n)^2}\right)$.
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n-1}}{n\sqrt{n}}$.
4. $u_n = \sqrt[n]{\left(1+\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2\right)\dots\left(1+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right)}$.

Exercice 2 - Norme deux d'une fonction et de sa dérivée

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(a) = 0$.

1. Prouver que, pour tout $x \in [a,b]$,
$$|f(x)|^2 \leq (x-a)\int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$
2. En déduire que
$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Exercice 3 - Borne inférieure

Soit E l'ensemble des fonctions continues strictement positives sur $[0,1]$. Calculer, après en avoir justifié l'existence
$$\inf_{f\in E}\left(\int_0^1 f(x)dx \times \int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right).$$
Cette borne inférieure est-elle atteinte? Si oui, par quelles fonctions?

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{dt}{\sin(t)}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1}\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x} \frac{\cos(t)}{t}dt$

Exercice 5 - Produit scalaire et matrices

Pour $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B).$$

1. Démontrer que cette formule définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\big(\operatorname{tr}(AB)\big)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$

Exercice 6 - Des exemples de produit scalaire

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$;
2. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $]a, b[$.