COLLE 26

EXERCICE 1

Démontrer que les formules suivantes définissent des produits scalaires sur l'espace vectoriel associé :

1. $\langle f, g \rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$;
2. $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ où $w \in E$ satisfait $w > 0$ sur $]a, b[$.

EXERCICE 2

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

EXERCICE 3

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt la base suivante :

$$u = (1, 0, 1), \quad v = (1, 1, 1), \quad w = (-1, -1, 0).$$

EXERCICE 4

Calculer $\inf_{a,b \in \mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 dx$.

EXERCICE 5

Soit $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}_+^*)$. Déterminer $\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f} \right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte?

EXERCICE 6

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :

$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H = \{P \in E; P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H .
2. Déterminer une base orthonormale de H .
3. En déduire la projection orthogonale de X sur H , puis la distance de X à H .

EXERCICE 7

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, déterminer la distance de $M(3, 4, 5)$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y - z + 2 = 0$.

EXERCICE 8

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0. \end{cases}$$

1. Déterminer une base orthonormale de G .
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G .
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E . Déterminer la distance de x à G .