COLLE 27

Exercice 1 - Quand une inégalité en implique une autre...

Soit x, y, z trois réels tels que $2x^2 + y^2 + 5z^2 \leq 1$. Démontrer que $(x+y+z)^2 \leq \frac{17}{10}$.

Exercice 2 - Applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que
$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$
et étudier les cas d'égalité.

2. On suppose en outre que $x_k > 0$ pour chaque $k \in \{1, \dots, n\}$ et que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Démontrer que
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \geq n^2$$
et étudier les cas d'égalité.

Exercice 3 - Un calcul de borne inférieure

Soit $E = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}_+^*)$. Déterminer $\inf_{f \in E} \left(\int_a^b f \times \int_a^b \frac{1}{f}\right)$. Cette borne inférieure est-elle atteinte?

Exercice 4 - Trouver une base orthonormale

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt.$$

Exercice 5 - Projection orthogonale dans $\mathbb{R}^4$

Soit $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. On considère G le sous-espace vectoriel défini par les équations
$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_3 + x_4 & = & 0. \end{array}\right.$$

1. Déterminer une base orthonormale de G.
2. Déterminer la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale p_G sur G.
3. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un élément de E. Déterminer la distance de x à G.

Exercice 6 - Base orthonormale, polynômes et projection

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire suivant :
$$(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3, b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3) = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

On pose H l'hyperplan $H = \{P \in E;\ P(1) = 0\}$.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer une base orthonormale de H.

3. En déduire la projection orthogonale de X sur H, puis la distance de X à H.

Exercice 7 - Calcul de distances

Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2-ax-b)^2dx$.

Exercice 8 - Une symétrie orthogonale

Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. On considère l'endomorphisme de E défini par $\phi(P)(X)=P(-X)$. Démontrer que ϕ est une symétrie orthogonale.

Exercice 9 - Diverses limites

Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0,0)$?

1. $f(x,y)=(x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Exercice 10 - Comme une limite

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0) \text{ et } f(0,0)=0.$$

La fonction f est-elle continue en (0,0)?

Exercice 11 - En deux parties

Démontrer que la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12 - Prolongement par continuité

Démontrer que la fonction définie par $f(x,y)=\frac{\sin(xy)}{xy}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.