COLLE 28

Exercice 1

Justifier l'existence des dérivées partielles des fonctions suivantes, et les calculer.

1. $f(x,y) = e^x \cos y$.
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\cos(xy)$.
3. $f(x,y) = \sqrt{1+x^2y^2}$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f(2+2t, t^2)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f(uv, u^2+v^2)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 3

On définit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}.$$

Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ pour ce prolongement.

Exercice 4

Démontrer que les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$;
2. $f(x,y) = x^2y^2 \ln(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

Exercice 5

Les fonctions suivantes ont-elles une limite (finie) en $(0,0)$?

1. $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
3. $f(x,y) = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}$

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

La fonction f est-elle continue en (0,0)?

Exercice 7

Démontrer que la fonction définie par $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8

On lance 100 fois un dé équilibré, à quatre faces de couleurs différentes et on note la couleur de la face cachée. On appelle S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la face cachée est rouge au cours des 100 lancers.
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une majoration de
$P(21 \leqslant S_{100} \leqslant 29)$.

Exercice 9

On effectue n tirages successifs (avec remise) d'une carte parmi les cœurs d'un jeu de 32 (il y a donc huit cartes). On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de figures parmi les n tirages. Et, on note $M_N = \frac{S_n}{n}$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de M_n.
2. Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev liée à M_n.
3. Combien de tirages faut-il répéter au minimum pour être sûr à 95% d'obtenir une fréquence de figures qui soit strictement comprise entre 0,35 et 0,4 ?

Exercice 10

Soit X la variable aléatoire égale au points obtenus par un élève à un exercice. On suppose que $E(X) = 7,3$ et $V(X) = 2,07$. Soit n un entier strictement positif. Pour i entier compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire qui à un échantillon de n élèves associe la note de l'élève numéro i à l'exercice. On admet que les variables X_i sont identiques et indépendantes.
On note M_n la variable aléatoire qui à un échantillon de n élèves associe la moyenne de leurs n notes, c'est à dire $M_n = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$

1. Quel est l'espérance de M_n?
2. Quelles sont les valeurs de n pour que l'écart type de M_n soit inférieur ou égal à 0,5?
   (Rappel: $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$)
3. Ecrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev liée à M_n.
4. Pour les valeurs de n trouvées au 2. montrer que la probabilité que $6,3 \leqslant M_n \leqslant 8,3$ est supérieur ou égale à 0,75.