COLLE 30

Exercice 1

On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Exercice 2

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que X_n/n approche p.

1. Quelle est la loi de X_n? Sa moyenne? Sa variance?
2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercice 3

On lance 100 fois un dé équilibré, à quatre faces de couleurs différentes et on note la couleur de la face cachée. On appelle S_n la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où la face cachée est rouge au cours des 100 lancers.
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer une minoration de
$P(21 \leqslant S_{100} \leqslant 29)$.

Exercice 4

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^3+1}$ **2**. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ **3**. $u_n = n\sin(1/n)$

4. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ **5**. $u_n = \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$ **6**. $u_n = \dfrac{1}{n!}$

7. $u_n = \dfrac{3^n+n^4}{5^n-2^n}$ **8**. $u_n = \dfrac{n+1}{2^n+8}$ **9**. $u_n = \dfrac{1}{\ln(n^2+1)}$

Exercice 5

Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$ **2**. $u_n = a^n n!,\ a \in \mathbb{R}_+$ **3**. $u_n = ne^{-\sqrt{n}}$

4. $u_n = \dfrac{\ln(n^2+3)\sqrt{2^n+1}}{4^n}$. **5**. $u_n = \dfrac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ **6**. $u_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$

7. $u_n = \dfrac{(n!)^3}{(3n)!}$.

Exercice 6

Etudier la convergence des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$ **2**. $u_n = \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ **3**. $u_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$.

Exercice 7

1. Démontrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
2. Démontrer que $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$.
3. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
4. Qu'a-t-on voulu mettre en évidence dans cet exercice?

Exercice 8

Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$. On justifiera la convergence de la série.

Exercice 9 -

Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(pour $n \geq 2$) est convergente, et calculer sa somme.

Exercice 10

Soit $x \in]-1,1[$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k$.

Exercice 11

Sachant que $e = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, déterminer la valeur des sommes suivantes :

$$\textbf{1}.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} \qquad \textbf{2}.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!} \qquad \textbf{3}.\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!}.$$