La fonction exponentielle

I Définition et propriétés

I.1 Définition

Théorème 1
Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f' = f \qquad et \qquad f(0) = 1$$

Cette fonction est appelée ***fonction exponentielle*** *et on la note* ***exp****.*
On a donc pour tout réel x, $exp'(x) = exp(x)$ et $exp(0) = 1$.

Propriété 1
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x)exp(-x) = 1$
et par conséquent $exp(x) \neq 0$, pour tout réel x.

PREUVE :
On considère la fonction $g(x) = exp(x)exp(-x)$, g est dérivable et
$g'(x) = exp'(x)exp(-x) + exp(x) \times (-exp'(-x)) = exp(x)exp(-x) - exp(x)exp(-x) = 0$, donc g est constante sur $\mathbb{R}$.
Or, $g(0) = exp(0)exp(0) = 1$, ainsi $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ce qui prouve la résultat, $exp(x)exp(-x) = 1$.
Le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $exp(x)exp(-x) = 1$, implique que $exp(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ car s'il existe x_0 tel que $exp(x_0) = 0$ alors $\exp(x_0)\exp(-x_0) = 0$ ce qui est impossible. ■

PREUVE DU THÉORÈME :
- L'existence d'une telle fonction est admise pour le moment.
- Montrons l'unicité : soit g une fonction vérifiant les conditions, et posons $h(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$. $h$est

une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car f est non nulle et f et g sont dérivables.
On a $g'(x) = \dfrac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{f^2(x)} = 0$, donc h est constante, or $h(0) = 1$. Ainsi, $h(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Ce qui permet de conclure que $f(x) = g(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où l'unicité. ■

I.2 Propriétés algébriques

Propriété 2
Pour tous réels x et y, on a :

$$exp(x+y) = exp(x) \times exp(y)$$

PREUVE :
Soit $y \in \mathbb{R}$.
Posons la fonction $h(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$. h est définie pour tout réel x car $exp(x) \neq 0$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonction dérivable.
Et on a $h'(x) = \dfrac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction h est constante. Comme $h(0) = \dfrac{\exp(0+y)}{\exp(0)} = \exp(y)$, alors $h(x) = \exp(y)$ et donc $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$, donc $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
■

Propriété 3
x et y sont deux réels.
(i) $\exp(x) > 0$ (ii) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$
(iii) $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ (iv) $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$
(v) $\exp(nx) = (\exp(x))^n, n \in \mathbb{Z}$

PREUVE :
(i) $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2})\exp(\frac{x}{2}) = (\exp(\frac{x}{2}))^2 > 0$.
(ii) démontré.
(iii) démontré.
(iv) $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \dfrac{1}{\exp(y)} = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
(v) Soit $n \in \mathbb{N}$, $\exp(2x) = \exp(x)\exp(x) = (\exp(x))^2$,
$\exp(3x) = \exp(x+2x) = \exp(x)\exp(2x) = \exp(x)(\exp(x))^2 = (\exp(x))^3$ et ainsi de suite ...
$\exp(nx) = (\exp(x))^n$.
$\exp(-nx) = \dfrac{1}{\exp(nx)} = \dfrac{1}{(\exp(x))^n} = (\exp(x))^{-n}$. D'où la propriété pour $n \in \mathbb{Z}$. ■

I.3 Une nouvelle notation

Remarque

Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on a $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n$.
On notera **e** le réel $\exp(1)$, et donc pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = e^n$.
On étend cette notation à tout les réel et par convention, on note $\exp(x) = e^x$.
Avec cette notation, les propriétés algébriques de la fonction exponentielle se traduisent comme les règles de calculs sur les exposants déjà connues.

Propriété 4

x et y sont deux réels.

(i) $e^x > 0$ $\qquad$ (ii) $x^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

(iii) $e^{x+y} = e^x \times e^y$ $\qquad$ (iv) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

(v) $e^{nx} = (e^x)^n, n \in \mathbb{Z}$

II Etude de la fonction exponentielle

II.1 Etude

Théorème 2

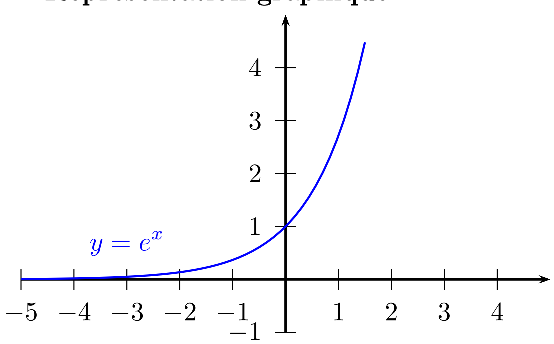
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

PREUVE :
On sait que $\exp'(x) = \exp(x)$ et que $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. ■

• Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	↗	1	↗

• **Représentation graphique**



II.2 Equations et inéquations

Théorème 3

Pour tout x et y réels,
(i) $e^x = 1 \iff x = 0$
(ii) $e^x = e \iff x = 1$
(iii) $e^x = e^y \iff x = y$

Théorème 4

Pour tout x et y réels,
(i) $e^x > 1 \iff x > 0$
(ii) $e^x > e \iff x > 1$
(iii) $e^x > e^y \iff x > y$

II.3 Dérivée

Théorème 5

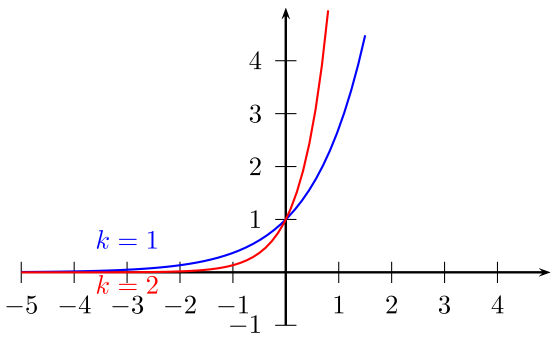
Soient a et b deux réels.
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x,

$$f'(x) = a \times e^{ax+b}$$

Preuve :
On a vu que la dérivée d'une fonction de la forme $g(x) = f(ax + b)$ admet pour dérivée $g'(x) = af'(ax + b)$.
On applique cette formule avec la fonction exp, on a donc :
$f'(x) = a\exp'(ax + b) = a\exp(ax + b) = ae^{ax+b}$. ■

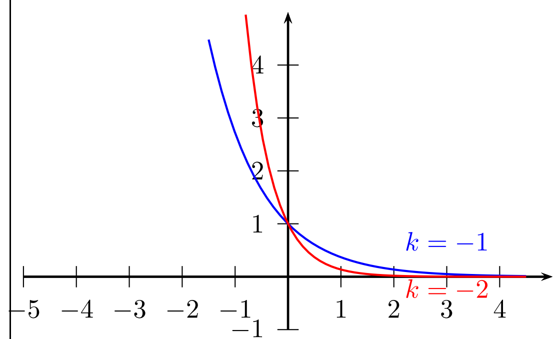
• Représentation des fonctions $t \mapsto e^{kt}$.

$k > 0$



• Suite géométrique de raison $q > 1$,
Il existe $k > 0$ tel que $e^k = q$.
$u_n = q^n = (e^k)^n = e^{kn}$.
Les termes de la suites peuvent se placer sur cette courbe. On voit que la croissance est très rapide. On parle de croissance exponentielle.
La suite admet pour limite $+\infty$.
On est dans ce cas, lorsqu'on parle d'une augmentation de x%.

$k < 0$



• Suite géométrique de raison $0 < q < 1$,
Il existe $k < 0$ tel que $e^k = q$.
$u_n = q^n = (e^k)^n = e^{kn}$.
Les termes de la suites peuvent se placer sur cette courbe.
La suite admet pour limite 0.
On est dans ce cas lorsqu'on parle d'une diminution de x%.