Cours de Mathématiques
PSI

6 septembre 2011

Table des matières

1 Quelques notions de mathématiques **9**
- 1.1 L'art de la démonstration . . . 9
  - 1.1.1 Qu'est-ce qu'une démonstration . . . 9
  - 1.1.2 Différentes techniques de démonstration . . . 9
  - 1.1.3 Rédaction correcte de démonstration type . . . 10
  - 1.1.4 L'établissement d'inégalités . . . 11
  - 1.1.5 L'analyse syntaxique . . . 12
  - 1.1.6 Un peu de français... . . . 12
  - 1.1.7 Les variables muettes . . . 13
  - 1.1.8 Les quantificateurs . . . 13

2 Séries numériques et intégration sur un intervalle quelconque **15**
- 2.1 Les séries numériques . . . 15
  - 2.1.1 Exemple fondamental . . . 15
  - 2.1.2 Définitions . . . 15
  - 2.1.3 Etude de la convergence . . . 17
  - 2.1.4 Le produit de Cauchy . . . 20
  - 2.1.5 Décomposition d'un réel en base décimal . . . 21
- 2.2 Intégration sur un intervalle quelconque . . . 21
  - 2.2.1 Intégrales impropres convergentes . . . 21
  - 2.2.2 Intégrales absolument convergentes . . . 22
  - 2.2.3 Propriétés de l'intégrale . . . 22
- 2.3 Comparaison série-intégrale . . . 23

3 Fonctions définies par une intégrale à paramètre. **25**
- 3.1 Etude de la continuité . . . 25
- 3.2 Etude de la dérivabilité . . . 26

4 Suites et Séries de fonctions **27**
- 4.1 Différents types de convergence . . . 27
  - 4.1.1 Convergence simple et uniforme . . . 27
  - 4.1.2 Interversion de limites . . . 29
  - 4.1.3 Convergence normale . . . 30
- 4.2 Approximation des fonctions d'une variable réelle . . . 31

5 **Dérivation et intégration des suites et séries de fonctions** **33**
5.1 Suites et séries de fonctions de classe C^k . . . 33
5.2 Integration sur un segment . . . 34
5.2.1 Convergence en moyenne . . . 34
5.2.2 Convergence en moyenne quadratique . . . 35
5.3 Intégration sur un intervalle quelconque . . . 36
5.3.1 Convergence en moyenne, en moyenne quadratique . . . 36
5.3.2 Théorème de convergence dominée . . . 37

6 **Séries entières** **39**
6.1 Définitions et premières propriétés . . . 39
6.1.1 Le rayon de convergence . . . 39
6.1.2 Opérations sur les séries entières . . . 41
6.2 La fonction exponentielle . . . 41
6.3 Séries entières d'une variable réelle . . . 41
6.3.1 Dérivation . . . 42
6.3.2 Fonctions dévelopable en série entière . . . 42
6.3.3 Développements en série entière classiques . . . 43

7 **Séries de Fourier** **45**
7.1 Les fonctions 2π-périodiques . . . 45
7.2 Les séries de Fourier . . . 46
7.2.1 Les coefficients de Fourier . . . 46
7.2.2 Etude de la suite des coefficients de Fourier . . . 47
7.3 Les séries de Fourier . . . 48
7.3.1 Définitions . . . 48
7.3.2 Convergence en moyenne quadratique . . . 48
7.3.3 Convergence ponctuelle et uniforme . . . 49
7.3.4 Polynômes trigonométriques convergeant uniformément . . . 50

8 **Equations différentielles** **51**
8.1 Equations différentielles non linéaires d'ordre 1 . . . 51
8.2 Equations différentielles linéaires . . . 52
8.2.1 Equations linéaires d'ordre 1 . . . 52
8.2.2 Equations linéaires à coefficients constants . . . 53
8.2.3 Equations linéaires scalaires d'ordre 1 . . . 54
8.2.4 Equations linéaires scalaires d'ordre 2 . . . 55

9 Bases de l'algèbre linéaire **57**
9.1 Définitions des structures 57
9.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels 58
9.2.1 Les Familles 60
9.3 Applications linéaires 62
9.3.1 Les projecteurs 63
9.4 Dualité 65
9.5 Rappel sur les matrices 66
9.6 La trace 67

10 Le déterminant **69**
10.1 Le groupe symétrique 69
10.2 Déterminant 70
10.2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs 70
10.2.2 Déterminant d'un endomorphisme 72
10.2.3 Déterminant d'une matrice carrée 73
10.3 Calcul pratique du déterminant 73

11 Réduction d'endomorphismes **77**
11.1 Sous-espaces stables 77
11.2 Les idéaux de polynômes 79
11.3 Polynômes d'endomorphismes 79
11.4 Eléments propres des endomorphismes 80
11.4.1 Structure des sous-espaces propres 80
11.4.2 Propriétés des valeurs propres 80
11.5 Eléments propres des matrices carrées 81
11.6 Polynôme caractéristique 81
11.7 Diagonalisation et trigonalisation des endomorphismes 82
11.8 Diagonalisation et trigonalisation des matrices carrées 83

12 Algèbre bilinéaire **85**
12.1 Les espaces préhilbertiens 85
12.1.1 Formes bilinéaires symétriques 85
12.1.2 Cas réel 86
12.1.3 Cas complexe 87
12.1.4 Orthogonalité 88
12.2 Espaces euclidiens 89
12.2.1 Bases orthonormales 90
12.2.2 Projections orthogonales 90
12.3 Retour aux espaces préhilbertiens 91

13 Endomorphismes d'un espace euclidien **93**
13.1 Adjoint d'un endomorphisme . . . 93
13.2 Endomorphismes autoadjoints . . . 94
13.3 Automorphismes orthogonaux . . . 94
13.3.1 Passage aux matrices . . . 95
13.3.2 Déterminants et réduction des automorphismes orthogonaux. . . . 96
13.4 Réduction des endomorphismes autoadjoints . . . 97

14 Courbes de l'espace et du plan **99**
14.1 Courbes paramétrées . . . 99
14.2 Etude locale d'un arc orienté . . . 100
14.3 Etude asymptotique des arcs orientés . . . 101
14.3.1 Cas d'une courbe paramétrique . . . 101
14.3.2 Cas d'une courbe en polaire . . . 102
14.4 Etude métrique d'un arc orienté . . . 102

15 Les Espaces Vectoriels Normés **105**
15.1 Les Normes . . . 105
15.2 Premières utilisations . . . 106
15.3 Comparaison des normes . . . 107
15.4 Etude des suites en dimension finie . . . 108
15.4.1 Comparaison des suites . . . 109
15.5 Topologie . . . 110

16 Etude locale d'une application **111**
16.1 Limites des applications . . . 111
16.2 Continuité des applications . . . 113
16.2.1 Premiers résultats . . . 113
16.2.2 Caractérisation topologique . . . 113
16.2.3 Relations de comparaison . . . 114
16.3 Continuité des applications linéaires . . . 114
16.4 Compacité . . . 115

17 Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles **117**
17.1 Dérivée en un point . . . 117
17.2 Applications de classe C^k . . . 119
17.3 Applications de classe C^k par morceaux . . . 120

18 Intégration sur un segment des fonctions à valeurs vectorielles **123**

18.1 Définitions et premières propriétés . . . 123

18.1.1 Cas des fonctions en escaliers . . . 123

18.1.2 Cas des fonctions continues par morceaux . . . 124

18.2 Positivité de l'intégrale . . . 125

18.3 Prolongement de l'intégrale . . . 125

18.4 Modification de l'intervalle d'intégration, relation de Chasles . . . 125

18.5 Majoration d'intégrales . . . 126

19 Dérivation et intégration, Formules de Taylor **127**

19.1 Primitives et intégrale d'une fonction continue . . . 127

19.2 Etude globale des fonctions de classe C^1 . . . 129

19.3 Formules de Taylor . . . 129

20 Fonctions de plusieurs variables **131**

20.1 Calcul différentiel . . . 131

20.1.1 Définitions et premières propriétés . . . 131

20.1.2 Composition . . . 133

20.1.3 Fonctions à valeurs numériques . . . 134

20.1.4 Dérivée d'ordre k . . . 135

20.1.5 Etude des courbes et surfaces . . . 136

20.1.6 Applications aux coniques et aux quadriques . . . 139

20.2 Calcul intégrale . . . 140

20.2.1 Intégrale double . . . 140

20.2.2 Intégrale curviligne . . . 142

Chapitre 1

Quelques notions de mathématiques

1.1 L'art de la démonstration

1.1.1 Qu'est-ce qu'une démonstration

La "brique" de la démonstration est l'implication. Une démonstration est constituée d'un ensemble de ces briques. On dit qu'une propriété est démontrée quand on est capable de juxtaposer de telles "briques" pour arriver à démontrer la propriété. Pour démontrer que $A \Rightarrow B$, on va utiliser une chaîne d'implications $A \Rightarrow C_1$, $C_1 \Rightarrow C_2$,..., $C_n \Rightarrow B$. Chacune de ces implications étant un résultat "connu" : On entend par là, théorème connu ou résultat évident (attention : qui l'est vraiment !!). Ces implications étant vraies, on a alors $A \Rightarrow B$.

Exemple: Montrons que l'équation $x^2+1=0$ n'admet pas de solution réelle. Ceci signifie que l'on doit démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2+1 \neq 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$.
    Donc $x^2 \geq 0$.
    Donc $x^2+1 \geq 1$.
Donc $x^2+1 \neq 0$.

1.1.2 Différentes techniques de démonstration

Il existe différentes techniques de démonstration pour démontrer l'implication $A \Rightarrow B$:

La démonstration directe

La démonstration directe consiste à, partir de l'hypothèse A, et raisonner par une chaîne d'implications pour démontrer B.
Rédaction type :
On suppose que A est vraie.
$\xrightarrow[\text{indentation}]{}$ ...
Donc B est vraie.

La démonstration par contraposition

La démonstration par contraposition consiste à, partir de l'hypothèse non-B, et construire une chaîne d'implication qui aboutit à non-A.

Rédaction type :
Raisonnons par contraposition.
On suppose que non-B est vraie.
$\xrightarrow[\text{indentation}]{} \ \ldots$
Donc non-A est vraie.

La démonstration par l'absurde

La démonstration par l'absurde consiste à, partir de l'hypothèse que A et non-B sont vraies simultanément, et contruire une chaîne d'implications qui aboutit à une contradiction.
Rédaction type :
Montrons le résultat par l'absurde.
Supposons donc que A et non-B sont vraies,
$\xrightarrow[\text{indentation}]{} \ \ldots$
On aboutit bien à une contradiction.

La démontration par récurrence

La démonstration par récurrence s'utilise de manière très particulière. Elle s'utilise lorsque l'on doit démontrer qu'une proposition $P(n)$, qui dépend d'un certain entier n, est vraie pour tout entier n. On peut démontrer (hors programme) que si l'on démontre que :
– $P(0)$ est vraie.
– Si pour tout $n \geq 0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
Alors, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.
Rédaction type :
Posons $P(n)$: " ... ".
Montrons que $P(0)$ est vraie.
$\xrightarrow[\text{indentation}]{} \ \cdots$ (Démontration du fait que $P(0)$ est vraie).
Montrons que pour tout $n \geq 0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$
$\xrightarrow[\text{indentation}]{} \ \cdots$ (Démontration du fait que $\forall n \geq 0, \quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie).

1.1.3 Rédaction correcte de démonstration type

Pour démontrer certain résultat, il existe une bonne manière de rédiger.

Montrer que $A \subset B$

Soit $x \in A$,
$\xrightarrow[\text{indentation}]{} \ \ldots$
Donc $x \in B$.
Exercice : Montrer que l'ensemble des entiers de la forme $n^2 + n$ est inclus dans l'ensemble des entiers pairs.

Montrer que s'il existe un x tel que $P(x)$, il est unique

Soit x et y tels que $P(x)$ et $P(y)$.
$\xrightarrow[\text{indentation}]{} \ \ldots$
Donc $x = y$.
Exercice : Montrer que le barycentre d'un ensemble de n points $A_1, \ldots, A_n$ muni de coefficients $c_1, \ldots, c_n$ est unique (condition sur les c_i ?).

Montrer qu'il existe un x tel que $P(x)$

On obtient x par un théorème ou en posant $x = \textit{quelquechose}$.
$\xrightarrow[\text{indentation}]{\hspace{2cm}}$ ...
On a bien x qui vérifie $P(x)$. Donc
$$\exists x, \quad P(x).$$

Montrer que pour tout x, $P(x)$

Soit x.
$\xrightarrow[\text{indentation}]{\hspace{2cm}}$ ...
Donc $P(x)$ est vraie. Donc
$$\forall x, \quad P(x).$$

1.1.4 L'établissement d'inégalités

Ce type de question est très courant en classe de spé. Plusieurs choses sont à savoir pour démontrer ce type de résultat correctement.

Connaître parfaitement le comportement de $\leq$ par rapport aux opérations algébriques.

Pour des réels a, b, c et d, on a :
1. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$.
2. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$.

Les erreurs à ne pas faire :
1. Ecrire des inégalités avec des nombres complexes.
2. Dire que si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $ac \leq bd$ (oubli de la condition de positivité).

Connaître les inégalités classiques

Théorème 1

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
1. $|\sin(x)| \leq 1$.
2. $|\cos(x)| \leq 1$.
3. $|\sin(x)| \leq |x|$.
4. $1 + x \leq e^x$.
5. $1 \leq \cosh x$.
6. $|x| \leq |\sinh x|$

Pour tout $x \in]1; +\infty[$:
$$\ln(1 + x) \leq x.$$

Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:
$$|x| \leq |\tan(x)|.$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\begin{array}{rcl} |x + y| & \leq & |x| + |y| \\ ||x| - |y|| & \leq & |x - y| \end{array}$$

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$, Montrer que :

$$\left| \frac{x^2 - xe^{-x}}{n+x} \right| \leq \frac{2}{n}.$$

1.1.5 L'analyse syntaxique

Pour bien traiter une question, il faut procéder à une analyse syntaxique de celle-ci. C'est l'analyse syntaxique qui donne le shéma de la démonstration. Par exemple, si la question est : "Montrer qu'il existe un unique ensemble A vérifiant la propriété P, montrer qu'alors $A \subset B$", on procédera de la sorte :

1. On démontre l'unicité de A vérifiant P s'il existe.
2. On démontre l'existence de A vérifiant P.
3. On démontre que si A vérifie P, alors $A \subset B$.

Ce shéma est très important car il evite :
- De faire un cercle vicieux : $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$ donc A est toujours vrai.
- De tomber dans des élucubrations douteuses : blabla incompréhensible pour le correcteur qui dès lors ne prend plus le candidat au sérieux.

Lors de la rédaction, le PLAN de la démonstration doit apparaître très clairement.

1.1.6 Un peu de français...

Liste non exaustive des expressions françaises utilisées en mathématiques, pour :
Le raisonnement par équivalence :

A est équivalent à B	$A \Leftrightarrow B$
A est une condition nécessaire et suffisante pour B	$A \Leftrightarrow B$
A si et seulement si B	$A \Leftrightarrow B$

Le raisonnement par déduction :

A implique B	$A \Rightarrow B$
Si A, alors B	$A \Rightarrow B$
A donc B	$A \Rightarrow B$
A est une condition suffisante pour B	$A \Rightarrow B$

Le raisonnement par induction :

A car B	$A \Leftarrow B$
A est une condition nécessaire pour B	$A \Leftarrow B$
On a A si B	$A \Leftarrow B$

1.1.7 Les variables muettes

Dans une démonstration, il arrive souvent qu'on ait recourt à des variables. Les variables que l'on utilise juste pour le temps de la démonstration sont dites muettes. Cela signifie que l'on peut changer le nom de ces variables sans que la démonstration en soit changée. Par exemple si on veut montrer que $A \subset B$, on procède de la manière suivante :
Soit $x \in A$, ..., donc $x \in B$. On aurait tout aussi bien pu écrire "Soit $y \in A$, ..., donc $y \in B$" ou "Soit $a \in A$, ..., donc $a \in B$".
Pour une variable muette, on définit un champ de validité, qui est le paragraphe dans lequel la variable est définie. Par exemple si on veut montrer que $A \subset B$, on procède de la manière suivante :
Soit $x \in A$, ..., donc $x \in B$. le champ de validité de la variable x est de $x \in A$ à $x \in B$. On ne peut utiliser la variable x qu'entre ces deux expressions.
Un exemple plus frappant de champ de validité d'une variable muette est dans l'écriture de somme ou d'intégrale. Par exemple, lorsqu'on écrit $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt$, la variable t n'existe qu'à l'intérieur de l'intégrale. En particulier, cela n'a aucun sens d'écrire :

$$\textbf{(FAUX) :} \quad \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}dt = t\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt,$$

ni non plus :

$$\textbf{(FAUX) :} \quad \sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n} = n\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}.$$

1.1.8 Les quantificateurs

Les quantificateurs sont des symboles mathématiques à n'utiliser que dans des cas précis. Ils ont une signification précise, et ne doivent en aucun cas être utilisés comme abréviation.
Exemple: Je veux démontrer qu'une propriété $P(x)$ qui dépend de x est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Je n'écris pas "$\forall x \in \mathbb{R}$", mais "Soit $x \in \mathbb{R}$" au début de la démonstration. Par contre, une fois la propriété démontrée, je peux écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x).$$

De même pour le $\exists$. Si la propriété

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad P(x)$$

est vraie, alors je peux écrire :
Soit $x \in \mathbb{R}$ qui vérifie $P(x)$. Ceci définit une variable x qui vérifie $P(x)$. Par contre, si j'écris :

$$\exists x \in \mathbb{R}, \quad P(x),$$

ceci ne fait qu'énoncer la possibilité de l'existence de x et non pas la "création" de celle-ci.

Chapitre 2

Séries numériques et intégration sur un intervalle quelconque

Objectifs :

1. *Savoir démontrer la convergence d'une série numérique à termes positifs.*
2. *Savoir démontrer la convergence d'une série numérique à termes quelconques.*
3. *Comprendre la construction de la notation décimale.*
4. *Savoir montrer qu'une intégrale est convergente, savoir la calculer.*
5. *Savoir montrer qu'une fonction est intégrable sur un intervalle I.*
6. *Savoir comparer une série et une intégrale.*

2.1 Les séries numériques

2.1.1 Exemple fondamental

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = z^n$. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}.$$

Ce qui donne :

1. Si $|z| < 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{1-z}$.
2. Si $|z| \geq 1$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

2.1.2 Définitions

Définition 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.
La série associée à cette suite est notée $\sum u_n$.

La suite des sommes partielles de cette série est la suite de terme général s_p avec $s_p = \sum_{k=0}^{p} u_k$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appellée terme général de la série.

Remarque: On peut définir une série comme un couple $((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_p)_{p\in\mathbb{N}})$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le terme général de la série et $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles définie comme ayant la propriété :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad s_p = \sum_{k=0}^{p} u_k.$$

Cependant on n'utilisera pas une telle définition pour ne pas alourdir les notations.

Remarque: A toute suite, on peut associer une unique série et ses sommes partielles. Mais aussi, toute suite peut être vue comme la suite des sommes partielles d'une unique série associée à une certaine suite.
En effet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 &= u_0 \\ v_n &= u_n - u_{n-1} \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$

On peut vérifier qu'on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k = u_n$.

Exemple: Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = ln(1+n)$. On peut lui associer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite des sommes partielles de la série $\sum v_n$ soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, on pose $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - u_{n-1} = ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Définition 3

Une série $\sum u_n$ associée à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite convergente, si et seulement si la suite de ses sommes partielles est convergente. La limite est alors notée :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Remarque: Ne pas confondre $\sum u_n$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$.

Proposition 4

Si une série $\sum u_n$ est convergente, alors son terme général tend vers 0. Autrement dit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite 0.

Remarque: La réciproque est FAUSSE ! (exemple de $\sum \frac{1}{k}$)

Remarque: La contraposée est très utile pour montrer qu'une série ne converge pas.

Exemple: $\sum k$ diverge ($\displaystyle\lim_{k\to+\infty} k \neq 0$).

Définition 5

On peut définir l'espace vectoriel des séries en définissant les opérations :

$$\sum u_n + \lambda \sum v_n =_{def} \sum (u_n + \lambda v_n).$$

Muni de ces lois, l'ensemble des séries (réelles ou complexes) forme un espace vectoriel.
Par linéarité de la limite, l'ensemble des séries convergentes en constitue un sous-espace vectoriel.

Remarque: On peut écrire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ que si au moins deux des sommes existent. On est alors assuré de l'existence de la troisième.

2.1.3 Etude de la convergence

Etude des séries de nombres réels positifs

Proposition 6

Une série de nombres réels positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p \to +\infty} s_p = \sup_p s_p.$$

Théorème 7 (Comparaison des séries)

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de nombres réels positifs telles que $u_n = O(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence de $\sum u_n$.

Remarque: Ce théorème s'utilise aussi sous forme contraposée.

Remarque: **Attention** la démonstration utilise bien la positivité des deux suites.

Corollaire 8

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de nombres réels positifs.

1. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$, et donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.
2. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq v_n,$$
alors $u_n = O(v_n)$, et donc la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence $\sum u_n$.

Exemple: Considérons la série $\sum \frac{1}{n^n}$. On a $\frac{1}{n^n} = O(\frac{1}{2^n})$ et donc la série $\sum \frac{1}{n^n}$ converge bien.
On étudie la série $\sum \frac{1}{n!}$. On a $\frac{1}{n!} = O(\frac{1}{2^{n-1}})$ et donc la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge bien.

Proposition 9

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de nombres réels strictement positifs telles que pour un certain $N \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

alors $u_n = O(v_n)$.

On se sert de cette propriété pour l'étude des séries à termes positifs.

Proposition 10 (Critère de D'Alembert)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs.
   S'il existe $\alpha \in]0;1[$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que :
   $$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \alpha,$$
   alors la série $\sum u_n$ est convergente.

2. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geq N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1,$$
   alors la série $\sum u_n$ est divergente.

3. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et si la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite ℓ, alors :
   - Si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge.
   - Si $\ell > 1$, $\sum u_n$ diverge.
   - Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Exemple: $\sum \frac{n}{2^n}$.

Remarque: Le théorème de d'Alembert s'utilise seulement dans le cas où u_n est de "nature multiplicative".

Les séries de nombres réels ou complexes

Définition 11

Une série $\sum u_n$ de nombres réels ou complexes vérifie le critère de Cauchy si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall p, q \geq n_0, \quad \left|\sum_{k=p}^{q} u_k\right| \leq \varepsilon.$$

Proposition 12

Une série $\sum u_n$ de nombres réels ou complexes vérifie le critère de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

Remarque: Cette propriété est un résultat essentiellement théorique. Il arrive qu'on s'en serve de manière pratique, mais uniquement sous forme contraposée.

Définition 13

Une série $\sum u_n$ de nombres réels ou complexes est dite absolument convergente si et seulement si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 14

Une série $\sum u_n$ de nombres réels ou complexes qui est absolument convergente est convergente.

Remarque: Ceci permet souvent de ramener l'étude de la convergence d'une série quelconque à celle d'une série à termes positifs.

Remarque: La réciproque est FAUSSE !

Comme $\left|\sum_{k=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{k=0}^{N} |u_n|$, si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, on peut passer à la limite et :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Corollaire 15

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs.

1. Si $|u_n| \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge absolument si et seulement si $\sum v_n$ converge.
2. S'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N, \quad |u_n| \leq v_n,$$
alors la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence absolue $\sum u_n$.

Définition 16

Pour une série $\sum u_n$ de nombre complexe, on définit :
- la série $\sum \Re(u_n)$ partie réelle de la série $\sum u_n$.
- la série $\sum \Im(u_n)$ partie imaginaire de la série $\sum u_n$.
- la série $\sum \overline{u_n}$ conjuguée de la série $\sum u_n$.

Proposition 17

Une série de nombres complexes est convergente si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont convergentes.

Exemple: Soit $z \in \mathbb{C}$. Etudions la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$. On va commencer par regarder la convergence absolue, c'est-à-dire étudier la convergence de la suite $\sum \frac{|z|^n}{n!}$. On utilise ensuite le critère de D'Alembert :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|z|^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Il en résulte que la série est absolument convergente donc convergente, et ceci quelque soit $z \in \mathbb{C}$.
On définit donc :

Définition 18

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit son exponentielle par :

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Les séries alternées

Théorème 19 (Séries alternées)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs décroissante et tendant vers 0 (on sait qu'elle converge,... pourquoi ?). Les séries $\sum(-1)^n u_n$ et $\sum(-1)^{n+1}u_n$ sont dites alternées. Ces séries convergent et on a :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| \leq u_n.$$

De plus, $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^p$.

Exemple: $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le théorème précédent, mais ne converge pas absolument.

2.1.4 Le produit de Cauchy

Définition 20

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries de nombres réels ou complexes, on définit la série $\sum w_n$, avec $w_n = \displaystyle\sum_{p+q=n} u_p v_q$.

Cette série est le produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Proposition 21

Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, il en est de même de la série $\sum w_n$, et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

Exemple: $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{3^n}$ sont absolument convergentes. On pose $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $v_n = \dfrac{1}{3^n}$, donc

$$\begin{aligned}
w_n &= \sum_{p+q=n} \frac{1}{2^p 3^q} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p 3^{n-p}} \\
&= \frac{1}{3^n}\sum_{p=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^p = \frac{1}{3^n}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right) - 1} \\
&= \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 6\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

La série $\sum w_n$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = 3.$$

2.1.5 Décomposition d'un réel en base décimal

Soit $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite où les a_i sont dans $[\![0;9]\!]$. Comme $a_k 10^{-k} = O(10^{-k+1})$ et comme $\sum 10^{-k+1}$ converge, alors la série $\sum a_k 10^{-k}$ converge. Sa limite est un nombre réel de l'intervalle $[0;1]$.
Réciproquement, soit $x \in [0;1]$, x est la limite de la série correspondant à son développement décimal. Tout nombre réel de $[0;1]$ peut donc s'écrire sous la forme d'un développement décimal (mais l'unicité n'est pas assuré) et tout développement décimal correspond à un réel.

2.2 Intégration sur un intervalle quelconque

Dans toute la section, I sera un intervalle quelconque ($[a;b]$, $]a;b]$, $[a;b[$, $]a;b[$, avec a et b éventuellement $-\infty$ et/ou $+\infty$).

2.2.1 Intégrales impropres convergentes

Définition 22

Si f est une application continue par morceaux sur $[a;b[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$$

existe et est finie.
On définie de manière analogue la convergence de cette intégrale si f est une application continue par morceaux sur $]a;b]$ ou encore $]a;b[$.

Remarque: Dans le cas où f est continue par morceaux sur $[a;b]$, on retrouve la définition usuelle de l'intégrale, par continuité de la primitive.

Définition 23

Si f est une application continue par morceaux sur $[a;b[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente si elle n'est pas convergente.

Proposition 24

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
$\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
$\displaystyle\int_0^1 \ln t\ dt$ est convergente.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.

Cas des fonctions positives

Proposition 25

Si f et g sont des fonctions continues par morceaux et à valeurs positives sur $I = [a; b[$, alors :

1. Si $f =_b O(g)$ et $\int_a^b f(t)dt$ est divergente, alors $\int_a^b g(t)dt$ l'est aussi.
2. Si $f =_b O(g)$ et $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)dt$ l'est aussi.
3. Si $f \sim_b g$, alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de la même nature (convergente ou divergente).

Exemple: $\dfrac{1}{t^\alpha(1+t)} \sim_0 \dfrac{1}{t^\alpha}$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha(1+t)}dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

2.2.2 Intégrales absolument convergentes

Définition 26

On dit qu'une fonction f continue par morceaux sur I a une intégrale sur I absolument convergente, ou est intégrable sur I, si l'intégrale sur I de la fonction $|f| : t \mapsto |f(t)|$ est convergente.

Proposition 27

Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I. Alors f est intégrable sur I si et seulement si il existe un nombre réel positif M tel que, pour tout segment J contenu dans I, $\int_J |f| \leq M$.

Proposition 28

Une intégrale absolument convergente est convergente.

Corollaire 29

Si f et g sont des fonctions continues par morceaux sur $I = [a; b[$, et g est à valeurs positives, alors :

1. Si $|f| \leq g$ et $\int_a^b g(t)dt$ est convergente, alors $\int_a^b |f(t)|dt$ l'est aussi.
2. Si $|f| \sim_b g$, alors $\int_a^b |f(t)|dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature (convergente ou divergente).

Définition 30

Si $a = \inf I$ et $b = \sup I$, on définit

$$\int_I f = \int_a^b f(t)dt.$$

2.2.3 Propriétés de l'intégrale

Propriétés algébrique de l'intégrale

Proposition 31

Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur I et intégrables sur I, alors $f + \lambda g$ est intégrable sur I et

$$\int_I f + \lambda g = \int_I f + \lambda \int_I g.$$

Relation de Chasles

Proposition 32

Si f est intégrable sur I et sur J, si $I \cup J$ est un intervalle sur lequel f est continue par morceaux et $I \cap J$ est vide ou réduit à un point, alors f est intégrable sur $I \cup J$ et :

$$\int_{I \cup J} f = \int_I f + \int_J f.$$

Inégalité de la moyenne

Proposition 33

Si f est intégrable sur I et si g est continue par morceaux et bornée sur I, alors fg est intégrable sur I, et

$$\int_I |fg| \leq \sup_{x \in I} |g(x)| \int_I |f|.$$

Changement de variable

Proposition 34

Soit f une fonction intégrable sur I et une bijection φ d'un intervalle I' sur I, de classe C^1 sur I', alors $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ est intégrable sur I' et :

$$\int_I f = \int_{I'} f \circ \varphi \cdot \varphi'.$$

Remarque: Si I' a pour extrémités a et b, on peut écrire :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

2.3 Comparaison série-intégrale

Proposition 35

Etant donnée une fonction f continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ à valeurs positives et décroissante, la série de terme général

$$w_n = \int_{n-1}^n f(t)dt - f(n)$$

est convergente. On a donc :
$\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Remarque: Un résultat analogue peut être obtenu si f est croissante.

Remarque: Si la fonction f est de classe C^1, $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^n f(t)dt - f(n) = \int_{n-1}^n f(t) - f(n)dt$. En intégrant par parties (ce qui est possible puisque f est de classe C^1), on obtient $w_n = -\displaystyle\int_{n-1}^n (t - n + 1)f'(t)dt$. Donc :

$$|w_n| \leq \int_{n-1}^n |f'(t)|dt.$$

Donc si $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_a^x |f'(t)|dt$ existe et est fini, $\sum w_n$ converge.

Exemple: Considérons $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$. Etudions la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$. Si $\alpha > 0$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ vérifie les hypothèses du théorème : La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est donc de même nature (convergente ou divergente) que l'intégrale $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$. On a donc :

Proposition 36 (Très important)

La série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Corollaire 37 (non explicitement au programme... à justifier)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs.
Si pour $\alpha > 1$, $\lim\limits_n n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Si pour $\beta < 1$, $\lim\limits_n n^\beta u_n = +\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Chapitre 3

Fonctions définies par une intégrale à paramètre.

Objectifs :

1. *Savoir étudier une fonction définie par une intégrale à paramètre.*

3.1 Etude de la continuité

Proposition 38

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$, où A est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que

1. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
2. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.
3. Il existe φ une fonction positive intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors, la fonction g définie sur A par $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.

Remarque: On peut remplacer l'hypothèse de domination par :
Pour tout segment $J \subset A$, il existe une fonction φ_J intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in J \times I$, $|f(x,t)| \leq \varphi_J(t)$.

3.2 Etude de la dérivabilité

Proposition 39 (Formule de Leibniz)

Soit A un intervalle de R, soit f une fonction telle que

1. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
2. La fonction f admet une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
3. Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I.
4. Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur A.
5. Il existe ψ une fonction positive intégrable sur I telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$ (hypothèse de domination).

Alors la fonction g est de classe C^1 sur A et

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Exemple: Etude de la fonction Gamma.

Chapitre 4

Suites et Séries de fonctions

Objectifs :

1. *Savoir étudier la convergence simple et uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions.*
2. *Savoir étudier la convergence normale d'une série de fonctions.*
3. *Savoir montrer qu'une fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.*

Dans tout le chapitre, I désignera un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Problème

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}$, tel que $f_n(x) = n^3 x e^{-nx}$.

1. Pour $x \in [0;1]$ fixé, que se passe-t-il quand n tend vers l'infini ?
2. Qu'en est-il de $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.
3. Peut-on parler de la convergence d'une suite de fonctions ?

4.1 Différents types de convergence

4.1.1 Convergence simple et uniforme

Comme l'espace vectoriel $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées de I dans $\mathbb{K}$ est de dimension infinie, il peut exister différents types de convergence.

Définition 40

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction de $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$. On dit que :

- La suite converge simplement vers $f \in \mathcal{B}(J,\mathbb{K})$ sur $J \subset I$ si :

$$\forall x \in J, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \geq N, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

  Autrement dit, pour tout x dans J,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

- La suite converge uniformément vers $f \in \mathcal{B}(J,\mathbb{K})$ sur $J \subset I$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in J, \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

  Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,J} = 0.$$

  Ce qui signifie que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de limite f pour la norme $\|.\|_\infty$.
- La suite converge uniformément sur tout segment vers $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{K})$, si pour tout segment $J \subset I$, la suite des restrictions à J des f_n converge uniformément vers la restriction de f à J.

Remarque: le $\forall x$ change de place, et ça change tout.

Remarque: (Importante) Si I est un intervalle ouvert, la convergence sur tout segment de I n'implique pas la convergence uniforme sur I.

Exemple: Voyons quelques exemples :

1. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + x}$, avec $n > 0$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$, mais la convergence n'est pas uniforme.
2. Soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $f_n(x) = xe^{-nx}$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 41

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.

Proposition 42

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément, alors la limite uniforme est f.

Remarque: Pour trouver la limite uniforme, on commence par chercher la limite simple qui est facile à trouver. On démontre ensuite la convergence uniforme de la suite vers cette limite.

Exemple: Soit $I =]0;+\infty[$ et $f_n : x \mapsto \dfrac{\sqrt{n}x}{1+nx^2}$. Cette suite de fonction converge simplement vers 0. Elle ne converge pas uniformément vers la fonction nulle. Par contre, elle converge sur tout segment de I.

Définition 43

Une série de fonctions $\sum f_n$ de $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ est la donnée d'une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$. On appelle suite des sommes partielles de la série $\sum f_n$ la suite de fonctions $\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 44

On définit les mêmes notions de convergence pour les séries de fonctions.

1. La série converge simplement vers f sur I si la suite des sommes partielles converge simplement vers f sur I.
2. La série converge uniformément vers f sur I si la suite des sommes partielles converge uniformément vers f sur I.
3. La série converge uniformément sur tout segment de I vers f si la suite des sommes partielles converge uniformément sur tout segment de I vers f.

Définition 45

Lorsque la série converge simplement sur I, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la limite simple. La suite des restes de la série $\sum f_n$ est, par définition, la suite de fonctions $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque: Si $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur I.

Proposition 46

$\sum f_n$ converge uniformément sur I si et seulement si la suite des restes converge uniformément vers 0.

4.1.2 Interversion de limites

Proposition 47

Soit $a \in I$: si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue au point a, alors f est continue en a.

Corollaire 48

- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément vers f sur I, alors f est continue sur I.
- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I qui converge uniformément vers f sur tout segment de I, alors f est continue sur I.

Proposition 49

Soit a une extrémité de I : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x)$ admet une limite b_n quand x tend vers a, alors la suite des $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et si l'on note b sa limite, f admet b pour limite en a.

Remarque: La proposition sur la continuité se déduit de la proposition précédente.

Corollaire 50

Soit a une extrémité de I. Si $\sum f_n$ converge uniformément et si pour tout n, f_n admet une limite b_n en a, alors la série $\sum b_n$ converge et :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Proposition 51

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur tout segment de I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, f l'est aussi.

Exemple: Soit $I = [0;1]$ et $f_n : x \mapsto x^n$. Cette suite de fonction continue converge simplement vers la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \text{ si } x \neq 1 \\ & & & 1 \text{ si } x = 1 \end{array}$$

qui n'est pas continue. La convergence ne peut donc être uniforme sur $[0;1]$.

Proposition 52

Si $\sum f_n$ converge vers f uniformément sur tout segment de I et si, pour tout n, f_n est continue sur I, f l'est aussi.

Exemple: $\displaystyle\sum \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément vers f sur $[-a;a]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ donc sa limite est continue.

4.1.3 Convergence normale

Définition 53

Une série $\sum f_n$ de fonctions de $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ est dite normalement convergente sur J si la série (numérique) $\sum \|f_n\|_{\infty,J}$ est convergente.
Une série $\sum f_n$ de fonctions de $\mathcal{B}(I,\mathbb{K})$ est dite normalement convergente sur tout segment de I si la série (numérique) $\sum \|f_n\|_{\infty,J}$ est convergente pour tout J segment de I.
avec $\|f\|_{\infty,J} = \sup_{x\in J} |f(x)|$.

Proposition 54

Si une série converge normalement, elle converge uniformément, et :

$$N_\infty\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_\infty(f_n).$$

Corollaire 55

Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la majoration $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$ et si $\sum \alpha_n$ est convergente, alors la série de fonction $\sum f_n$ est normalement convergente donc uniformément convergente.

Exemple: $\sum (-1)^n x^n$ sur $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

4.2 Approximation des fonctions d'une variable réelle

Définition 56

Soit $[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, une subdivision de l'intervalle est une famille $(c_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$, avec $n \geq 1$ telle que : $a = c_0 < \ldots < c_n = b$.
Si $C = (c_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ est une subdivision de $[a;b]$ et soit $x \in [a;b]$, on définit, si il existe i tel que $c_i = x$:

$$C \cup \{x\} = C,$$

et dans le cas contraire, il existe i_0 tel que $x \in]a_{i_0}; a_{i_0+1}[$, on définit la subdivision $C \cup \{x\} = (d_i)_{i\in[\![0;n+1]\!]}$ par :

$$\begin{aligned} &d_i = c_i, \text{ si } i \leq i_0 \\ &d_i = x, \text{ si } i = i_0 + 1 \\ &d_i = c_{i-1}, \text{ si } i > i_0 + 1 \end{aligned}$$

Ainsi définit, $C \cup \{x\}$ est une subdivision de $[a;b]$.
Si $C = (c_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $C' = (c'_i)_{i\in[\![0;n']\!]}$ sont deux subdivisions de $[a;b]$, on définit l'union de ces deux subdivisions par $C \cup C' = (\ldots(C \cup \{c'_0\}) \ldots \cup \{c'_n\})$. Par récurrence immédiate, $C \cup C'$ est une subdivision de $[a;b]$.

Proposition 57

Soit $C = (c_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $C' = (c'_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ deux subdivisions de $[a;b]$, soit $]d_i; d_{i+1}[$ un intervalle de la subdivision $C \cup C'$, alors il existe j et j' tels que :

$$]d_i; d_{i+1}[\subset]c_j; c_{j+1}[\text{ et }]d_i; d_{i+1}[\subset]c'_{j'}; c'_{j'+1}[.$$

Définition 58

Une fonction φ est dite en escalier sur un intervalle $[a;b]$ si et seulement si il existe une subdivision $(a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ de $[a;b]$ telle que la restriction $\varphi|_{]a_i;a_{i+1}[}$ est constante. On dit que cette subdivision est subordonnée à φ.

Proposition 59

Les fonctions en escaliers sur un intervalle $[a;b]$ constituent un espace vectoriel, sous-espace vectoriel des fonctions de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 60

Une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite en escalier si il existe un intervalle $[a;b]$ tel que $\varphi|_{[a;b]}$ est en escalier sur $[a;b]$ et φ est nulle en dehors de $[a;b]$.
Les fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$ constituent un espace vectoriel.

Remarque: Si $\varphi|_{[a;b]}$ est en escalier sur $[a;b]$, alors pour tout intervalle $[c;d] \subset [a;b]$ $\varphi|_{[c;d]}$ est en escalier sur $[c;d]$.

Définition 61

Une fonction f de I (intervalle quelconque) dans $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux si pour tout intervalle $[a;b]$, $f|_{[a;b]}$ est continue par morceaux sur $[a;b]$.
Les fonctions continues par morceaux sur I constituent un espace vectoriel.

Théorème 62

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Théorème 63 (Weierstrass)

Toute fonction continue sur un segment est la limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.

Théorème 64 (Weierstrass)

Toute fonction continue sur $\mathbb{R}$ $T-$périodique est la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques $T-$périodiques.

Chapitre 5

Dérivation et intégration des suites et séries de fonctions

Objectifs :

1. *Savoir dériver et intégrer la limite d'une suite de fonctions de classe C^k.*
2. *Convergence en moyenne et en moyenne quadratique (Important : Les inégalités, convergence uniforme implique convergence en moyenne).*
3. *Théorème de convergence dominée.*

Dans ce chapitre, on considère uniquement des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$.

5.1 Suites et séries de fonctions de classe C^k

Théorème 65

Supposons que :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction de classe C^1 sur I.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I.
3. La suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

Alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.

Remarque: Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a, b \in I$ avec $[a; b] \subset I$:

$$N_{\infty,[a;b]}(f) \leq |f(a)| + \int_{[a;b]} |f'|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on en déduit en appliquant cette inégalité à $(f - f_n)$ que

$$N_{\infty,[a;b]}(f - f_n) \leq |f(a) - f_n(a)| + \int_{[a;b]} |f' - f_n'|.$$

Or, le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers l'infini, donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I.

Ce théorème se généralise aux fonctions de classe C^k.

Théorème 66

Supposons que :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^k sur I
2. Les suites $(f_n^{(p)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers g_p sur I pour $p \leq k-1$.
3. La suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g.

Alors pour tout $p \in [\![0;k]\!]$, g_p est de classe C^{k-p} sur I et $g_p^{(k-p)} = g$.

Remarque: Ce théorème là n'est pas au programme, c'est une version avec des hypothèses plus fortes qui l'est.

On peut écrire un théorème analogue pour les séries :

Théorème 67

Supposon que :

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur I.
2. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I.
3. La série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la somme de la série $\sum f_n$ est de classe C^1 sur I et :

$$D\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} D(f_n)$$

Exercice: Ecrire le théorème pour les séries de fonctions de classe C^k.

Application: Montrer que $e_z : t \mapsto e^{tz}$ est de classe C^∞ et que $De_z = ze_z$.
En définissant

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

5.2 Integration sur un segment

5.2.1 Convergence en moyenne

Définition 68

Soit $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a;b]$. L'application

$$N_1 : f \mapsto \int_{[a;b]} |f|$$

est une norme sur $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{C})$ qu'on appelle norme de la convergence en moyenne.

Proposition 69

L'inégalité de la moyenne peut se réécrire en terme de norme :

$$\left|\int_{[a;b]} f\right| \leq N_1(f) \leq (b-a)N_\infty(f).$$

Proposition 70

La convergence uniforme sur $[a;b]$ implique la convergence en moyenne sur $[a;b]$, et de plus, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[a;b]$, qui converge uniformément sur $[a;b]$ vers une fonction f continue sur $[a;b]$, $\left(\int_a^b f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n = \int_a^b f.$$

Exemple: Voir le chapitre "Suites et Séries de fonctions".

Corollaire 71

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications continues sur $[a;b]$ et si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a;b]$, alors la série des intégrales sur $[a;b]$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b f_n = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Il résulte aussi de l'inégalité de la moyenne la propriété suivante :

Corollaire 72

Si la série $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum N_1(f_n)$ est convergente et :

$$N_1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} N_1(f_n).$$

5.2.2 Convergence en moyenne quadratique

Définition 73

L'application $(f,g)\mapsto \int_{[a;b]}\overline{f}g$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions continues $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{C})$. $(\mathcal{C}([a;b],\mathbb{C}),(.,.))$ est donc un espace préhilbertien complexe.

Corollaire 74 (Cauchy-Schwarz)

Si $f,g\in\mathcal{C}([a;b],\mathbb{C})$, alors :

$$\left(\int_{[a;b]}\overline{f}g\right)^2 \leq \int_{[a;b]}|f|^2\int_{[a;b]}|g|^2.$$

Définition 75

La norme induite par ce produit scalaire est l'application $N_2 : f\mapsto \sqrt{\int_{[a;b]}|f|^2}$. Cette norme est appellée norme de la convergence en moyenne quadratique.

Proposition 76

Si $f\in\mathcal{C}([a;b],\mathbb{C})$, alors :

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}}N_1(f) \leq N_2(f) \leq \sqrt{b-a}N_\infty(f).$$

Corollaire 77

Dans l'espace $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{C})$, la convergence uniforme sur $[a;b]$ implique la convergence en moyenne quadratique sur $[a;b]$ implique la convergence en moyenne sur $[a;b]$.

5.3 Intégration sur un intervalle quelconque

5.3.1 Convergence en moyenne, en moyenne quadratique

Proposition 78

Les fonctions continues et intégrables sur I à valeurs complexes constituent un sous-espace vectoriel de $C^0(I)$. On peut le munir de $N_1 : f \mapsto \int_I |f|$ qui est une norme.

Définition 79

Une fonction f continue à valeurs complexes est dite de carré intégrable sur I si $|f|^2$ est intégrable sur I.

Proposition 80

Le produit de deux fonctions de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

Exemple: La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}e^{-x}$ est une fonction de carré intégrable sur $[1;+\infty[$.

Remarque: Attention, le produit de 2 fonctions intégrables sur I n'est pas forcément intégrable sur I.

Exemple: $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est intégrable sur $[0;1]$, mais pas f^2.

Proposition 81

Les fonctions de carré intégrable sur I constituent un sous-espace vectoriel des fonctions continues sur I. On le note $L^2(I,\mathbb{K})$.

Exemple: $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une fonction de carré intégrable sur $]1;+\infty[$ mais pas sur $]0;1[$.

Proposition 82

Si f et g sont des fonctions de carré intégrable sur I, l'application $(f,g) \mapsto \int_I \overline{f}g$ est un produit scalaire.

Remarque: On peut donc appliquer à $L^2(I,\mathbb{K})$ muni de ce produit scalaire toute la théorie des espaces préhilbertiens.

Proposition 83

L'application $N_2 : f \mapsto \sqrt{(f|f)}$ est donc une norme. On l'appelle la norme de la convergence en moyenne quadratique.

Proposition 84

Si f et g sont des fonctions de carré intégrable sur I, on a par Cauchy-Schwarz

$$(f|g) \leq N_2(f)N_2(g).$$

Proposition 85

Par l'inégalité triangulaire, et par Cauchy-Schwarz, on peut écrire

$$|(f|g)| \leq N_1(fg) \leq N_2(f)N_2(g).$$

Application: Les séries de Fourier.

5.3.2 Théorème de convergence dominée

Théorème 86 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, continues par morceaux sur I. On suppose que

1. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I.
2. Il existe une fonction φ continue par morceaux, positive et intégrable sur I telle que pour tout entier n, $|f_n| \leq \varphi$ (hypothèse de domination).

Alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n.$$

Exemple: Posons $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \chi_{[0;n]}(x)$. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $t \mapsto e^{-t}$, qui est continue. De plus, pour $n \geq 2$, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $f_n(x) \leq e^{-x}$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$1 = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)dt.$$

Théorème 87 (Application aux séries)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I telles que

1. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I.
2. La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors f est intégrable sur I et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \int_I f$$

Remarque: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit f_n application continue sur $\mathbb{R}^+$, affine sur $[0; n^2]$ et sur $[n^2; 2n^2]$, et nulle sur $[n^2; +\infty[$ telle que

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(n^2) = \frac{1}{n}, \quad f_n(2n^2) = 0.$$

On a alors :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = n,$$

alors que la suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque: Il peut arriver qu'on ne puisse pas exprimer la fonction f (surtout dans le cas des séries). Dans ce cas, la continuité de f ne peut être prouvée directement. On pourra donc le cas échéant remplacer dans le théorème de convergence dominée :
– "continue par morceaux" par "continue"
– "converge simplement" par "converge uniformément sur tout segment"
On sait alors par théorème que la limite de la suite des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue.

Chapitre 6

Séries entières

Objectifs :

1. *Connaître la définition et savoir calculer le rayon de convergence d'une série entière.*
2. *Connaître les propriétés des séries entières.*
3. *Savoir calculer l'expression d'une série entière avec des fonctions connues.*
4. *Savoir utiliser les séries entières pour résoudre des problèmes (équations différentielles).*

6.1 Définitions et premières propriétés

6.1.1 Le rayon de convergence

Définition 88

Une série entière est une série de fonctions $\sum f_n$, avec $f_n(z) = a_n z^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels ou complexes. (Les f_n peuvent être à variable réelles ou complexes).

Définition 89

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, le rayon de convergence de la série entière est

$$R = \sup\{\rho \in \mathbb{R}^+ \ \mid \ (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Exemple: Pour $\sum nz^n$, $R = 1$. Pour $\sum n!z^n$, $R = 0$. Pour $\sum \frac{z^n}{n!}$, $R = +\infty$.

Proposition 90 (Lemme d'Abel)

Soit $\rho \in \mathbb{R}_*^+$ tel que la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors pour $|z| \leq \rho$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée (attention pas inférieure) par $\left(\left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 91

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, on appelle $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z| \leq R\}$ le disque fermé de convergence de la série entière, et $D = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z| < R\}$ le disque ouvert de convergence de la série entière

Proposition 92

Pour tout $z \in D$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Remarque: Si $z \notin \overline{D}$, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Proposition 93

On a

$$\begin{aligned} R &= \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n \rho^n \text{ converge} \right\} \\ &= \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n \rho^n \text{ converge absolument} \right\} \\ &= \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers } 0 \right\}. \end{aligned}$$

Proposition 94 (Règle de D'Alembert)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ existe et vaut ℓ, alors le rayon de convergence de la série entière est $\dfrac{1}{\ell}$.

Proposition 95 (Règle de Cauchy)

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ existe et vaut $\dfrac{1}{\ell}$, alors le rayon de convergence de la série entière est ℓ.

Exemple: $\sum \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Proposition 96

Pour tout compact inclus dans D, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente.

Définition 97

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle somme de la série entière la fonction

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

La variable z peut être choisie réelle ou complexe suivant les besoins.

Il en résulte immédiatement de la proposition précédente que :

Proposition 98

La somme d'une série entière est continue sur le disque de convergence ouvert de cette série entière.

Proposition 99

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R et si la série numérique $\sum |a_n| R^n$ converge, alors la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge normalement sur le disque fermé de convergence.

Exemple: $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$.

6.1.2 Opérations sur les séries entières

Proposition 100

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R', alors si le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ est R'', on a :
- Si $R = R'$, alors $R'' \geq R$.
- Si $R \neq R'$, alors $R'' = \min(R, R')$.

De plus, pour tout z tel que $|z| < \min(R, R')$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$

Remarque: On n'a pas forcément égalité dans le premier cas, car pour $\sum z^n$ et $\sum -z^n$, $R = 1$ et pour $\sum (1-1) z^n$ $R = \infty$.

Proposition 101

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R', alors si le rayon de convergence de la série entière $\sum w_n z^n$, avec $w_n = \sum\limits_{p+q=n} a_p b_q$, est R'', on a $R'' \geq \min(R, R')$. De plus, pour tout z tel que $|z| < \min(R, R')$,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^n$$

Exemple: On a pas forcément égalité, en effet : $\sum 0 z^n$ et $\sum z^n$ ont pour rayons respectifs $+\infty$ et 1. La série produit est $\sum 0 z^n$ qui a pour rayon $+\infty$.

6.2 La fonction exponentielle

Définition 102

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini. Sa somme définit une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On l'appelle l'exponentielle complexe. Pour un complexe z, on note $\exp(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Proposition 103

Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.

Corollaire 104

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$.
2. La fonction exponentielle est un morphisme de groupe surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ sur $(\mathbb{C}^*, \times)$.
3. $\exp' = \exp$.

6.3 Séries entières d'une variable réelle

D ne sera plus ici le disque de convergence, mais l'intervalle de convergence $D =]-R; R[$.

6.3.1 Dérivation

Définition 105

Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est une série entière :

1. $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ est une série entière qui est appelée série dérivée de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.
2. $\sum_{n\geq p} n\ldots(n-p+1)a_n z^{n-p}$ est une série entière qui est appelée série dérivée p^{ieme} de $\sum a_n z^n$.

Proposition 106

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, alors la série entière $\sum n a_n z^{n-1}$ a un rayon de convergence égale à R.

Corollaire 107

La somme d'une série entière est dérivable sur son intervalle de convergence et sa dérivée est la somme de sa série dérivée.

Corollaire 108

La somme d'une série entière est de classe C^∞, et la dérivée p^{ieme} de la somme de la série entière est la somme de sa série dérivée p^{ieme}.

Corollaire 109

Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$, alors f admet une primitive sur D qui s'annule en 0 qui est la somme de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est le même que celui de la série $\sum a_n z^n$.

Autre corollaire qui sert dans le paragraphe suivant :

Corollaire 110

Soit f la somme d'une série entière $\sum a_n z^n$, alors

$$a_n = \frac{\left(D^{(n)} f\right)(0)}{n!}.$$

6.3.2 Fonctions dévelopable en série entière

Définition 111

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, avec $0 \in I$ et I intervalle ouvert, est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si il existe un réel $\alpha > 0$ tel que f coïncide avec la somme d'une série entière sur $]-\alpha;\alpha[$.

Il résulte du paragraphe précédent que :

Proposition 112

Une fonction développable en série entière au voisinage de 0 est de classe C^∞ au voisinage de 0. Autrement dit, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que f soit de classe C^∞ sur $]-\alpha;\alpha[$.

Exemple: On peut utiliser ceci pour montrer qu'une fonction est de classe C^∞. Soit $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ prolongée en 0 par 1. g est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[$. En effet, elle est de classe C^∞ sur $]-1;+\infty[\setminus\{0\}$, elle est développable en série entière en 0.

Définition 113

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec $0 \in I$ et I intervalle ouvert. Si f est de classe C^∞, on appelle série de Taylor de f en 0 la série entière $\sum \dfrac{D^n f(0)}{n!} z^n$.

Proposition 114

Une fonction développable en série entière au voisinage de 0 est égale à sa série de Taylor sur un intervalle $]-\alpha;\alpha[$, avec $\alpha > 0$.

Corollaire 115

Si les sommes de deux séries entières sont égales sur un intervalle $]-\alpha;\alpha[$, avec $\alpha > 0$, alors les deux séries entières sont égales.

6.3.3 Développements en série entière classiques

On sait déjà que pour tout $x \in]-1;1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

On obtient ainsi :

$$\frac{1}{z_0 - x} = \frac{1}{z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{z_0^n}.$$

Ce qui donne, par décomposition en éléments simples le développement en série entière de toute fraction rationnelle. Par intégration, on obtient :

$$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Et par changement de variable :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

On a déjà vu que, pour $(x,t) \in \mathbb{R}^2$

$$\exp(tx) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n x^n}{n!}.$$

il en résulte les développements en série entières de sin, cos, ch, sh.
Si α est un nombre réel, on montre que pour tout $x \in]-1;1[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Chapitre 7

Séries de Fourier

Objectifs :

1. *Savoir calculer les coefficients de Fourier d'une fonction.*
2. *Connaître et savoir utiliser les théorèmes de convergence des séries de Fourier.*

7.1 Les fonctions 2π-périodiques

Définition 116

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est 2π-périodique si et seulement si elle est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+2\pi) = f(x).$$

Dans toute la suite, sauf mention contraire, les fonctions considérées seront définies sur $\mathbb{R}$.

Proposition 117

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit g une fonction définie sur un intervalle $[a; a+2\pi[$, alors il existe une unique fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, 2π-périodique f telle que $f|_{[a;a+2\pi[} = g$.
Si g est continue par morceaux sur $[a; a+2\pi[$, alors f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Si g est continue sur $[a; a+2\pi[$ et $g(a) = g(a+2\pi)$, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 118

Les fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ (resp. continues sur $\mathbb{R}$) 2π-périodiques constituent un sous-espace vectoriel, sous-espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur $\mathbb{R}$, on les note respectivement $CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Proposition 119

Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors pour tout réel x,

$$\int_x^{x+2\pi} f(t)dt = \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

7.2 Les séries de Fourier

7.2.1 Les coefficients de Fourier

Définition 120

Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors on définit le n^{ieme} coefficient de Fourier de f par

$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Pour une telle fonction, on définit $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ qui est la suite de ses coefficients de Fourier.

Remarque: D'après le paragraphe précédent, on peut écrire pour n'importe quel réel x :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{x}^{x+2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Exemple: Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ définie par

$$\forall x \in [-\pi; \pi[, \quad f(x) = e^x.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-in)t}}{1-in} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}}{1-in} \right]. \end{aligned}$$

Proposition 121

Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\overline{f}) = \overline{c_{-n}(f)}.$$

Corollaire 122

Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et est à valeurs réelles,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \overline{c_{-n}(f)}.$$

Proposition 123

Soit $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Si on pose $g : t \mapsto f(-t)$ alors,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(g) = c_{-n}(f).$$

Corollaire 124

Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est paire

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = c_{-n}(f).$$

Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est impaire

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = -c_{-n}(f).$$

Proposition 125

Si $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et si on pose $g : t \mapsto f(t+a)$, alors $c_n(g) = e^{ina} c_n(f)$.

Pour une fonction à valeurs réelles, on utilise plutôt les coefficients en sinus et cosinus.

Définition 126

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

Proposition 127

On a :

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \\ b_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt \end{aligned}$$

7.2.2 Etude de la suite des coefficients de Fourier

Proposition 128

La fonction

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & CM_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ & f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

est linéaire. La suite $(\hat{f}(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée et

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Par définition $\|f\|_1 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|dt$.

Proposition 129

La suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ converge de limite 0 quand n tend vers $\pm\infty$.

Dans le cas de fonctions de classe C^k, on a même mieux :

Proposition 130

Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap C^1_m(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors

$$c_n(Df) = inc_n(f).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap C^{k-1}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap C^k_m(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors

$$c_n(D^{(k)}f) = (in)^k c_n(f).$$

Corollaire 131

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap C^{k-1}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap C^k_m(\mathbb{R},\mathbb{C})$, alors, quand n tend vers $\pm\infty$, $c_n(f)$ est négligeable devant $|n|^{-k}$.

7.3 Les séries de Fourier

7.3.1 Définitions

Définition 132

Pour $f \in CM_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, on définit pour tout entier naturel p :

$$S_p(f)(x) = \sum_{k=-p}^{p} c_k(f) e^{ikx}.$$

Lorsque pour un réel x la suite $(S_p(f)(x))_{p\in\mathbb{N}}$ converge, la série de Fourier de f est dite convergente au point x et la somme de la série de Fourier est par définition, la limite de la suite $(S_p(f)(x))_{p\in\mathbb{N}}$.

Remarque: $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=-p}^{p} a_k$ n'est pas la même chose que $\lim_{p\to-\infty,\ q\to+\infty} \sum_{k=p}^{q} a_k$. En effet, $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=-p}^{p} k = 0$ et $\lim_{p\to-\infty,\ q\to+\infty} \sum_{k=p}^{q} k$ n'existe pas.

Proposition 133

Si f est à valeurs réelles, on a :

$$S_p(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{p} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

7.3.2 Convergence en moyenne quadratique

Définition 134

On a déjà vu que les fonctions continues 2π-périodiques constituent un espace vectoriel $(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$. L'application $(f, g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(t) g(t) dt$ est un produit scalaire. On lui associe la norme $\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}$.

On peut appliquer le cours sur les espaces préhilbertiens.

Proposition 135

Les fonctions $t \mapsto e_n(t) = e^{int}$, où n parcourt $\mathbb{Z}$ forment une famille orthonormale. Et pour tout n, $c_n(f) = (e_n|f)$.

Proposition 136

La projection orthogonale d'un élément f de $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_p$ engendré par les e_n, avec $|n| \leq p$ est la somme partielle $S_p(f)$. En particulier, l'application qui à tout élément P de $\mathcal{P}_p$ associe $\|f - P\|_2$ atteint son minimum en un unique point qui est $S_p(f)$.

Pour toute la fin du paragraphe, on note $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Proposition 137

On a la relation (propriété de la projection orthogonale)

$$\|f\|_2^2 = \|S_p(f)\|_2^2 + d(f, \mathcal{P}_p)^2.$$

Il en résulte immédiatement :

Corollaire 138 (Inégalité de Bessel)

$$\|S_p(f)\|_2^2 = \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Corollaire 139 (Inégalité de Bessel)

On en déduit que la suite $\left(\sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2\right)_{p\in\mathbb{N}}$ converge, et on a donc

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Proposition 140 (Egalité de Parseval)

La suite de fonctions $(S_p(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f en moyenne quadratique (pour la norme $\|.\|_2$), et

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2.$$

(L'inégalité de Bessel -version 2- est une égalité).

Remarque: Ceci s'écrit $\|f\|_2^2 = \dfrac{|a_0|^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{|a_k|^2 + |b_k|^2}{2}$.

Corollaire 141

Si f et g sont dans $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors

$$(f|g) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)\overline{c_n(g)}$$

Corollaire 142

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} \\ & f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

est injective.

Remarque: Ces résultats s'étendent relativement simplement aux fonctions continues par morceaux. Seul problème : $(f|g)$ n'est plus un produit scalaire et on a plus Stone-Weierstrass trigonométrique.
En fait, on commence par étendre ces résultats aux fonctions de D, l'espace des fonctions continues par morceaux 2π-périodiques qui vérifie en tout point $f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ sur lequel $(f|g)$ est bien un produit scalaire et pour lesquels on peut étendre Stone-Weierstrass trigonométrique.
Une fonction continue par morceaux $2\pi-$périodique est à un nombre de point fini près une fonction de D (ce qui ne change pas la convergence en moyenne quadratique), par contre, on perd l'injectivité de $f \mapsto \hat{f}$.

7.3.3 Convergence ponctuelle et uniforme

Proposition 143

Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C_m^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ (donc uniformément), et sa limite est f.

Corollaire 144

Si $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C_m^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, la série de Fourier de f converge simplement vers f.

Théorème 145 (Dirichlet)

Si f est 2π-périodique de classe C^1 par morceaux, alors pour tout réel x, la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à $\lim_{h\to 0,\ h>0} \dfrac{f(x+h)+f(x-h)}{2}$. En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(x)$.

7.3.4 Polynômes trigonométriques convergeant uniformément

Proposition 146

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n$ est une série trigonométrique (c'est-à-dire qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que $f_n : t \mapsto c_n e^{int}$) qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, alors la suite de ses coefficients de Fourier est exactement $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Chapitre 8

Equations différentielles

Objectifs :

1. *Savoir résoudre une équation différentielle.*
2. *Connaître et savoir utiliser le théorème de Cauchy*

8.1 Equations différentielles non linéaires d'ordre 1

Définition 147

On considère une équation différentielle

$$(E) \quad x' = f(x,t),$$

où f est une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Une solution de (E) est un couple (I,x), où x est une fonction de classe C^1 sur I, à valeurs réelles, telle que pour tout $t \in I$:

$$(x(t),t) \in U \text{ et } x'(t) = f(x(t),t).$$

Définition 148

Une solution (I,f) de (E) est dite prolongeable si il existe une solution (J,g) telle que $I \subset J$, $I \neq J$ et $g|_I = f$.

Définition 149

Une solution de (E) est dite maximale si elle ne peut pas être prolongée.

Théorème 150 (Cauchy)

Pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $(x_0,t_0) \in U$, il existe une unique solution maximale (I,x) de (E) telle que $x(t_0) = x_0$. De plus I est ouvert.

Exemple: On considère l'équation différentielle (E) : $x' = tx^2$ (à variables séparables). Cette équation possède comme solution évidente la fonction nulle. Cherchons une solution de (E) telle que $x(t_0) = x_0 \neq 0$, par le théorème de Cauchy une telle solution, définie sur un certain intervalle I ne peut s'annuler, on peut donc écrire

$$\forall t \in I, \quad \frac{x'(t)}{x(t)^2} = t.$$

On intègre cette égalité entre t_0 et $z \in I$:

$$\begin{aligned} \forall z \in I, \qquad & \int_{t_0}^{z} \frac{x'(t)}{x(t)^2} dt = \int_{t_0}^{z} t dt \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{x(t_0)} - \frac{1}{x(z)} = \frac{z^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} \end{aligned}$$

Finallement, on trouve $x(z) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x_0} + \dfrac{t_0^2}{2} - \dfrac{z^2}{2}}$

Remarque: Graphiquement, deux solutions d'une équation différentielle non linéaire d'ordre 1 ne peuvent se couper.

8.2 Equations différentielles linéaires

8.2.1 Equations linéaires d'ordre 1

Dans toute la suite, F désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 151

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 est une équation du type

$$(E) \quad x' = a(t)x + b(t),$$

où b est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans F, et a est une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$.
Une solution de cette équation sur I est une fonction x de classe C^1 telle que

$$\forall t \in I, \quad x'(t) = a(t)\,(x(t)) + b(t).$$

Exemple: Une solution de $x' = tx + t^2$ sur $\mathbb{R}$ est une fonction x de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout réel t, $x'(t) = tx(t) + t^2$.
Remarque: Ceci peut s'écrire sous forme matricielle :

$$X' = A(t)X + B(t).$$

où B est une application continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'espace des matrices colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et A est une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque: Si a et b sont de classe C^k, alors les solutions de (E) sont de classe C^{k+1}.
Exemple: $X' = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$

Définition 152

On appelle problème de Cauchy (linéaire d'ordre 1), la donnée d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (E), et d'un couple $(t_0, x_0) \in I \times F$.
Une solution du problème de Cauchy est une solution (I, x) de l'équation (E) telle que $x(t_0) = x_0$.
Le couple (t_0, x_0) est souvent appelé condition aux limites.

Théorème 153 (Cauchy)

Un probléme de Cauchy (linéaire d'ordre 1) possède une unique solution.

Définition 154

Soit $(E)\ \ x' = a(t)x + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1, l'équation homogène associée est, par définition :

$$(H) \ \ x' = a(t)x.$$

Proposition 155

Les solutions sur I de l'équation $x' = a(t)x$ consituent un sous-espace vectoriel $S(H)$ de $C^1(I)$. De plus, pour tout élément α de I, l'application $\Phi_\alpha : f \mapsto f(\alpha)$ de $S(H)$ dans F est un isomorphisme.

Corollaire 156

La dimension de l'espace des solutions $S(H)$ est égale à la dimension de F.

Exemple: On considère l'équation différentielle

$$X' = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} X.$$

Si on trouve deux solutions X_1 et X_2 qui ne sont pas libres, toutes les solutions de (H) sont données par $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$, avec λ_1 et λ_2 qui décrivent $\mathbb{K}$.

Définition 157

Si $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une famille de n solutions de (H) et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de F. La matrice $W(t) = mat_{\mathcal{B}}(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ est appellée la matrice wronskienne associé à la famille $\mathcal{F}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.
$w(t) = det(W(t))$ est appellé le wronskien associé à la famille $\mathcal{F}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Proposition 158

Pour tout $t \in I$, $rg(e_1, \ldots, e_n) = rg(e_1(t), \ldots, e_n(t))$.

Corollaire 159

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de n solutions de (H). Soit w le wronskien de $\mathcal{F}$ par rapport à une base $\mathcal{B}$ de F fixée. $\mathcal{F}$ est une base de l'ensemble des solutions :

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \exists t_0 \in I, \quad w(t_0) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \forall t \in I, \quad w(t) \neq 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{F}$ est un système fondamental de l'équation (H).

Proposition 160

Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ un système fondamental de (H) et $k \in \{0, 1\}$. Pour tout $f \in C^k(I, F)$, il existe n applications $u_1, \ldots, u_n$ de $C^k(I, F)$, définies de manière unique par $f = u_1 e_1 + \ldots + u_n e_n$.

Corollaire 161 (Méthode de variation de la constante)

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un système fondamentale de (H). Une application $f = u_1 e_1 + \ldots + u_n e_n$ est solution de (E) si et seulement si $u_1' e_1 + \ldots + u_n' e_n = b$.
D'après la propriété précédente, l'application $b \in C^0(I, F)$ s'écrit de façon unique $b = v_1 e_1 + \ldots + v_n e_n$, où les $v_i \in C^0(I, \mathbb{K})$. On a donc pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $u_i' = v_i$.

8.2.2 Equations linéaires à coefficients constants

On considère une équation (E) de la forme :

$$x' = ax,$$

c'est-à-dire que l'application a est constante. On peut aussi lorsqu'on choisit une base de F l'écrire sous forme matricielle :

$$X' = AX.$$

Si A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = D$ est diagonale, on a alors

$$(P^{-1}X)' = P^{-1}X' = P^{-1}APP^{-1}X = D(P^{-1}X)$$

Il reste alors à résoudre des équations différentielles du type.

$$x' = ax,$$

où les fonctions sont à valeurs scalaires. Si A n'est pas diagonalisable, on la trigonalise.

Exercice: Résoudre le système différentielle $X' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque: On peut ensuite résoudre les équation du type $x' = ax + b(t)$ simplement par la méthode de variation de la constante.

Exercice: Résoudre le système différentiel $X' = AX + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix}$, où A est la matrice de l'exercice précédent.

8.2.3 Equations linéaires scalaires d'ordre 1

On considère les équations

$$\begin{array}{ll} (E) & a(t)x' + b(t)x = c(t) \\ (H) & a(t)x' + b(t)x = 0 \end{array}$$

où les applications a, b et c sont à valeurs scalaires, continues sur I.

Définition 162

(H) s'appelle l'équation homogène associée à (E).
Une solution de (E) s'appelle une solution particulière de l'équation différentielle.

Proposition 163

Si l'application a ne s'annule pas :
- L'ensemble des solutions de (H) sur I est une droite vectorielle $S(H)$.
- Si f est une solution particulière de (E), l'ensemble des solutions de (E) est la droite affine $f + S(H)$.

Proposition 164

Lorsque a ne s'annule pas, la solution f de l'équation homogène (H) telle que $f(t_0) = x_0$ est donnée par la formule :

$$f : t \mapsto x_0 \cdot \exp\left(-\int_{t_0}^{t} \frac{b(x)}{a(x)} dx\right).$$

L'ensemble des solutions de (E) est alors donné par variation de la constante.

Exercice: Trouver les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $xy' + y = x^2$.

Remarque: Si a s'annule, on restreint l'étude aux intervalles où a ne s'annule pas et on recolle les solutions obtenues aux points tels que $a(t) = 0$.

8.2.4 Equations linéaires scalaires d'ordre 2

On considère les équations

$$\begin{array}{ll} (E) & a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t) \\ (H) & a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0 \end{array}$$

où les applications a, b, c et d sont à valeurs scalaires et continues sur I. On suppose que l'application a ne s'annule pas, on peut donc écrire (H) et (E) sous la forme

$$\begin{array}{ll} (E) & x'' = a_1(t)x' + b_1(t)x + c_1(t) \\ (H) & x'' = a_1(t)x' + b_1(t)x \end{array}$$

En posant $y = x'$, on peut écrire (H) et (E) comme des systèmes différentielles :

$$(E) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = a_1(t)y + b_1(t)x + c_1(t) \end{array} \right.$$
$$(H) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = y \\ y' = a_1(t)y + b_1(t)x \end{array} \right.$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c_1(t) \end{pmatrix}$, $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_1(t) & a_1(t) \end{pmatrix}$, on peut écrire ces systèmes sous formes matricielles :

$$\begin{array}{l} (E) \Leftrightarrow X' = A(t)X + B(t) \\ (H) \Leftrightarrow X' = A(t)X \end{array}$$

On peut réécrire les théorèmes de la partie théorique pour ces équations particulières.

Définition 165

On appelle problème de Cauchy (scalaire d'ordre 2), la donnée d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (E), et d'un couple $(t_0, x_0, x'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Une solution du problème de Cauchy est une solution x de l'équation (E) telle que $x(t_0) = x_0$ et $x'(t_0) = x'_0$.

Théorème 166 (Cauchy)

Le probléme de Cauchy possède une unique solution.

Proposition 167

La dimension de l'espace des solutions $S(H)$ est égale à la dimension de F, c'est-à-dire 2.
L'ensemble des solutions de (E), est un sous-espace affine de dimension 2, de direction $S(H)$.

Application: La méthode de variation de la constante.
On peut définir pour deux solutions h_1 et h_2 de (H) la matrice wronskienne associée :

$$W(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h'_1(t) & h'_2(t) \end{pmatrix}.$$

(h_1, h_2) constitue une base de $S(H)$ si et seulement si il existe un $t_0 \in I$ tel que $\det(W(t_0)) \neq 0$ si et seulement si pour tout $t \in I$, $\det(W(t)) \neq 0$. Supposons cette condition réalisée, pour toute fonction $f \in C^2(I, \mathbb{K})$, on peut alors écrire

$$\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} h_1 \\ h'_1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} h_2 \\ h'_2 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} f &= u_1h_1 + u_2h_2 \\ f' &= u_1h_1' + u_2h_2' \end{cases}$$

De la première équation, il résulte, $f' = u_1'h_1 + u_2'h_2 + u_1h_1' + u_2h_2'$. Ce qui par soustraction avec la deuxième équation du système différentielle donne :

$$u_1'h_1 + u_2'h_2 = 0.$$

En remplaçant les expresssions f et f' en fonctions de h_1 et h_2 dans (E), on obtient la condition nécessaire et suffisante pour que f soit solution de (E) :

$$\begin{aligned} u_1'h_1 + u_2'h_2 &= 0 \\ u_1'h_1' + u_2'h_2' &= c_1(t) \end{aligned}$$

Il suffit alors de résoudre le système pour obtenir la solution :

$$u_1' = -\frac{c_1h_2}{w}, \quad u_2' = \frac{c_1h_1}{w}, \quad \text{avec } w = \det\begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix}.$$

La solution général de l'équation (E) s'écrit alors :

$$t \mapsto K_1h_1(t) + K_2h_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{c_1(u)}{w(u)}(h_1(u)h_2(t) - h_2(u)h_1(t))du.$$

Avec $K_1, K_2 \in \mathbb{K}$.

Exercice: Trouver les solutions sur $]-1;1[$ de l'équation :

$$4(1-t^2)x'' - 4tx' + x = \frac{1}{1-t}.$$

Application: Supposons qu'on connaisse une seule solution x de (H) qui ne s'annule pas. On peut alors écrire toute fonction y de classe C^1 sous la forme $y = \lambda x$, où λ est une fonction de classe C^1. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} y &= \lambda x \\ y' &= \lambda' x + \lambda x' \\ y'' &= \lambda'' x + 2\lambda' x' + \lambda x'' \end{aligned}$$

En sachant que x est solution de (H), on obtient :

$$\begin{aligned} a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y &= a(t)(\lambda''x + 2\lambda'x' + \lambda x'') + b(t)(\lambda'x + \lambda x') + c(t)\lambda x \\ &= a(t)(\lambda''x + 2\lambda'x') + b(t)(\lambda'x) \end{aligned}$$

Donc y est solution de (E) si et seulement si

$$a(t)(\lambda''x + 2\lambda'x') + b(t)(\lambda'x) = d(t).$$

Cela revient donc à résoudre l'équation différentielle d'inconnue λ' :

$$a(t)x\lambda''x + (2a(t)x' + b(t)x)\lambda' = d(t).$$

Chapitre 9

Bases de l'algèbre linéaire

Objectifs :

1. *Savoir démontrer*
   (a) *qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.*
   (b) *qu'une application est linéaire.*
   (c) *qu'une somme de sous-espaces vectoriels est directe.*
   (d) *que des sous-espaces vectoriels sont supplémentaires.*
   (e) *qu'une famille est libre ou ne l'est pas, qu'une famille est génératrice ou ne l'est pas.*
2. *Connaître et savoir utiliser le théorème de la base incomplète.*
3. *Si f est une application linéaire, savoir calculer une base de $\ker f$, Im f, savoir calculer rgf et trf.*
4. *Savoir démontrer qu'une application linéaire p est un projecteur, savoir l'étudier.*
5. *Connaître et savoir utiliser le théorème du rang.*
6. *Savoir calculer une base duale, ou une base antéduale, savoir à quoi elle correspond.*

9.1 Définitions des structures

Définition 168

Soit un ensemble E muni :
– d'une loi interne $+$ de $E \times E \to E$, telle que $(E, +)$ est un groupe commutatif.
– d'une loi externe . de $\mathbb{K} \times E \to E$ où $\mathbb{K}$ est un corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ dans le programme de PSI).
Si pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$ les égalités suivantes sont vraies, on dit que le triplet $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel :

$$(\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$$
$$(\lambda + \mu).x = (\lambda.x) + (\mu.x)$$
$$\lambda.(x + y) = (\lambda.x) + (\lambda.y)$$
$$1.x = x$$

Remarque: $\lambda.x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0$.

Définition 169

Un quadruplet $(A, +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}-$algèbre si :
– $(A, +, .)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
– $(A, +, \times)$ est un anneau.
– Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x, y \in A$: $(\lambda).(x \times y) = (\lambda.x).y$.
Lorsque de plus l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif, on dit que l'algèbre est commutative.

Remarque: Le corps $\mathbb{K}$ est appelé corps des scalaires. Ses éléments seront appelés des scalaires. Les éléments de E (ou A) seront appelés des vecteurs.

Remarque: On utilisera les abus de notation suivants :
- On dira que A est une algèbre plutôt que $(A, +, ., \times)$ est une algèbre. On dira que E est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel plutôt que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
- Lorsque le corps des scalaires sera connu. On dira que E est un espace vectoriel plutôt qu'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel.
- On notera λx plutôt que $\lambda . x$.

Exemple: $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, mais aussi un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. (Préciser les lois).

Exemple: $\mathbb{R}[X]$ est une $\mathbb{R}-$algèbre commutative.

Définition 170

Un sous-ensemble **non-vide** F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E. Si l'on a :
- $\forall x, y \in F, \quad x + y \in F.$
- $\forall x \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda x \in F.$

Remarque: L'ensemble vide n'est pas un sous-espace vectoriel. $\{0_E\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E. E est le plus grand sous-espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion.

Remarque: Un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel.

Proposition 171

Pour vérifier qu'une partie **non-vide** F de E est un sous-espace vectoriel de E, il suffit de vérifier :

$$\forall x, y \in F, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x + \lambda y \in F.$$

Exemple: Vérifier que dans $\mathbb{R}^3$, les ensembles définis par :

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\},$$

où a, b et c sont des réels, sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

9.2 Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Proposition 172

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. L'intersection $F \cap G$ est aussi un sous-espace vectoriel de E.
Si $(F_i)_{i \in 1, \ldots, n}$ est une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. L'intersection $F_1 \cap \ldots \cap F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque: Cette intersection est toujours non-vide, car tous les sous-espaces vectoriels contiennent 0.

Pour la réunion, les choses ne se passent pas si bien. A la place on définit la somme de deux espace vectoriel de la manière suivante :

Définition 173

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. On définit la somme de F et G par :

$$F + G = \{x + y | \ x \in F, y \in G\}.$$

Si $(F_i)_{i \in 1, \ldots, n}$ est une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. On définit la somme de ces sous-espaces par :

$$F_1 + \ldots + F_n = \{x_1 + \ldots + x_n | \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ \ x_i \in F_i\}.$$

Proposition 174

La somme de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E et

$$E_1 + \ldots + E_n = Vect(E_1 \cup \ldots \cup E_n).$$

Définition 175

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $F + G$ est directe si $F \cap G = \{0\}$. Dans ce cas, la somme est notée $F \oplus G$.
Si $(F_i)_{i \in 1,\ldots,n}$ est une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme est directe si :

$$\forall i \in [\![1; n]\!],\ F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0\}.$$

Dans ce cas, on note $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n$.

Remarque: : Bien faire attention que si $n > 2$, $\forall i \neq j,\ F_i \cap\ F_j = \{0\}$ n'implique pas que la somme est directe.

Proposition 176

Si $(F_i)_{i \in 1,\ldots,n}$ est une famille finie de sous-espaces vectoriels de E. $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ si et seulement si :

$$\forall x \in F_1 + \ldots + F_n, \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n,\ x = x_1 + \ldots + x_n,$$

ce qui est aussi équivalent à :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in F_1 \times \ldots \times F_n,\ x_1 + \ldots + x_n = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots = x_n = 0.$$

Définition 177

Des sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i \in 1,\ldots,n}$ sont dits supplémentaires dans E, si ils sont en somme directe, et si $F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n = E$.

Un des intérêts des sous-espaces supplémentaires est de permettre la construction d'applications linéaires.

Remarque: On note souvent $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n = E$ pour dire que les F_i sont supplémentaires dans E.

Proposition 178

Soit E et F des espaces vectoriels. Soit une famille $(E_i)_{i \in 1,\ldots,n}$ de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. On suppose que pour tout i, on a une application $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$. Il existe alors une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout i, sa restriction à E_i soit u_i.

Rappel : Si F est un sous-espace vectoriel de E et $u : E \to G$ est une application linéaire, alors l'application $v : F \to G$ définie par $v(x) = u(x)$ pour tout $x \in F$ est linéaire. C'est la restriction de u à F.

Exemple: Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E : On a alors $E = \mathbb{K}e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{K}e_n$. Soit $v_1, \ldots, v_n$ une famille de E, on pose $u_i : \mathbb{K}e_i \to E$ tel que $u_i(\lambda e_i) = \lambda v_i$. Ceci permet de construire une application $u \in \mathcal{L}(E)$.

Exemple: Si $u((1,0,0)) = (a,b,c)$, $u((0,1,0)) = (a',b',c')$ et $u((0,0,1)) = (a'',b'',c'')$, cela définit complètement $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

Corollaire 179

Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

9.2.1 Les Familles

Définition 180

Une famille $(x_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ de vecteurs de E est dîte :
-libre si :

$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad \lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n=0\Rightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_n=0.$$

-génératrice si :

$$\forall x\in E,\quad \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad x=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n.$$

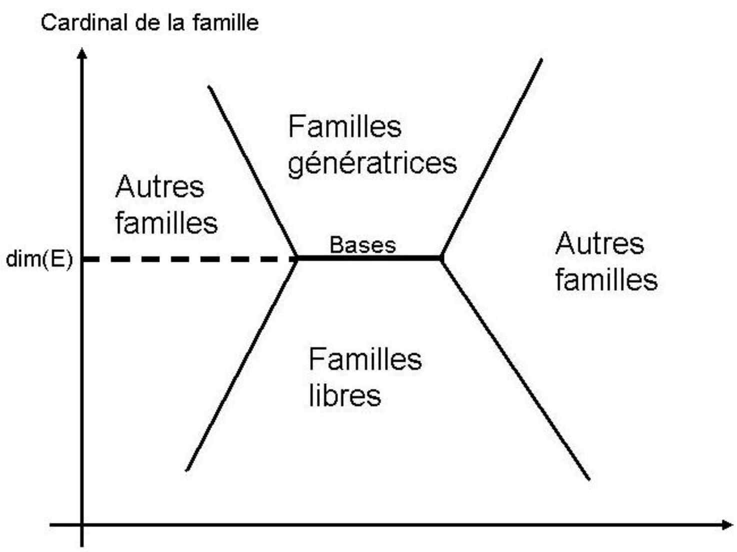
- On démontre facilement qu'une sous-famille d'une famille libre est libre, et qu'une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.
- Une famille qui n'est pas libre est dite liée.
- Ne pas croire qu'une famille est ou bien libre ou bien génératrice.

Proposition 181

Une famille libre maximale pour l'inclusion est génératrice.
Une famille génératrice minimale pour l'inclusion est libre.

Proposition 182

Une famille libre et génératrice est maximale parmi les familles libres, et minimale parmi les familles génératrices.



Définition 183

Une famille à la fois libre et génératrice est appellée une base.

Théorème 184

Soit $\mathcal{F}$ une famille de cardinal n d'un espace vectoriel E. Alors toute famille de cardinal $n+1$ dont les éléments sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{F}$ est liée.

Corollaire 185

Si un espace vectoriel E qui contient une famille $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ génératrice de cardinal n, alors toute famille libre de E est de cardinal inférieur ou égal à n.

Corollaire 186

Si une base est de cardinal fini n. Toutes les bases ont même cardinal n. Cet entier est la dimension de E.

Définition 187

Si E possède des familles libres de toutes tailles, alors on dit que E est de dimension infinie.

Corollaire 188

Si G est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie E, alors G est de dimension finie.

Théorème 189 (Théorème de la base incomplète)

Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille finie et génératrice de E. Soit J tel que $J \subset I$, et $(e_i)_{i\in J}$ soit libre. Alors il existe K tel que $J \subset K \subset I$ et $(e_i)_{i\in K}$ est une base de E.

Corollaire 190

- De toute famille finie et génératrice, on peut extraire une base.
- Si E possède une famille génératrice finie (donc si E est de dimension finie), a toute famille finie et libre, on peut rajouter des éléments de manière à obtenir une base.

Théorème 191

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n.$$

Ceci définit un isomorphisme entre E et $\mathbb{K}^n$. Les λ_i sont appellées les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 192

Soit F un sous-espace vectoriel de E de fimension finie. Une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E est dite adaptée à F si il existe un entier p tel que $\mathcal{B}' = (e_i)_{i\in[\![1;p]\!]}$ soit une base de F.

Définition 193

Soit $(F_i)_{i\in\{1,\ldots,k\}}$ une famille de sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E est dite adaptée à cette décomposition si il existe des entiers $1 = p_0 < p_1 < \ldots < p_{k-1} < p_k = n+1$ tels que : Pour tout $j \in [\![0; k-1]\!]$, $(e_i)_{i\in[\![p_j;p_{j+1}-1]\!]}$ est une base de F_{j+1}. Autrement dit, on a :

$$\underbrace{e_1, \ldots, e_{p_1-1}}_{\text{base de } F_1}, \underbrace{e_{p_1}, \ldots, e_{p_2-1}}_{\text{base de } F_2}, \ldots, \underbrace{e_{p_{k-1}}, \ldots, e_n}_{\text{base de } F_k}.$$

9.3 Applications linéaires

Définition 194

Une application u d'un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel F est linéaire si elle vérifie :

$$\forall(\alpha,\beta,x,y)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times E\times E,\quad u(\alpha x+\beta y)=\alpha u(x)+\beta u(y).$$

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E,F)$. L'ensemble des applications linéaires de E dans E est noté $\mathcal{L}(E)$.

Remarque: En particulier, on a $u(0)=0$.

Exemple: Dans $\mathbb{R}^2$, $f:(x,y)\mapsto(2x+3y,x-y)$ est une application linéaire, mais pas $f:(x,y)\mapsto(x^2-y,x+3y)$, ni $f:(x,y)\mapsto(x+2y+1,x-3y)$.

Proposition 195

L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ peut être muni d'une loi interne et d'une loi externe défini par :

$$\forall(f,g)\in\mathcal{L}(E,F)^2,\quad\forall x\in E,\quad(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$
$$\forall(\lambda,f)\in\mathbb{K}\times\mathcal{L}(E,F),\quad\forall x\in E,\quad(\lambda f)(x)=\lambda f(x).$$

Avec ces lois, $\mathcal{L}(E,F)$ possède une structure d'espace vectoriel.
L'ensemble $\mathcal{L}(E)$ peut être muni d'une loi interne supplémentaire définie par :

$$\forall f,g\in\mathcal{L}(E),\quad(f\circ g)(x)=f(g(x)).$$

$(\mathcal{L}(E),+,.,\circ)$ est une algèbre mais qui n'est pas commutative pour $\dim E>1$.

Définition 196 (Vocabulaire)

- Une application linéaire est aussi appelé un morphisme.
- Un morphisme de E dans E est appelé un endomorphisme de E.
- Un morphisme bijectif est appelé un isomorphisme.
- Un endomorphisme bijectif est appelé un automorphisme.

Proposition 197

L'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Définition 198

E et F sont dits isomorphes si et seulement si il existe $\varphi\in\mathcal{L}(E,F)$ qui soit un isomorphisme.

Remarque: Dire que deux espaces vectoriels sont isomorphes signifie que leurs structures d'espaces vectoriels sont identiques "aux notations près".

Corollaire 199

$\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^q$ sont isomorphes si et seulement si $p=q$.

Définition 200

Soit u une application linéaire de E dans F.
Le noyau de u, noté $\ker(u)$, est l'ensemble des x de E tels que $u(x)=0$, autrement dit $\ker u=u^{-1}(\{0\})$.
L'image de u, noté Im (u), est l'ensemble des x de F qui sont l'image d'un élément de E par u, autrement dit Im $(u)=u(E)$.

Proposition 201

Le noyau de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de E. L'image de u est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 202

- u est injectif si et seulement si $\ker(u) = \{0\}$, et dans ce cas, si F est de dimension finie, E aussi, et $\dim E \leq \dim F$.
- u est surjectif si et seulement si $\mathrm{Im}\ (u) = F$, et dans ce cas, si E est de dimension finie, F aussi, et $\dim F \leq \dim E$.
- Si u est bijectif alors $\dim E = \dim F$.

Remarque: Si u est injective ou surjective et $\dim E = \dim F$, alors u est bijective.

Exemple: $f : (x,y) \mapsto (y - 2x, x)$ est clairement injective, donc c'est un isomorphisme.

Théorème 203

Soit u une application linéaire de E dans F.
Soit E' un sous-espace vectoriel supplémentaire du noyau de u. L'application linéarire u définit un isomorphisme de E' sur $\mathrm{Im}\ (u)$.

Application: Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. On définit le morphisme $u : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}^{n+1}$ par $u(P) = (P(a_0), \ldots, P(a_n))$. Trouver le noyau de u ? Que peut-on en déduire ?

9.3.1 Les projecteurs

Définition 204

Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. La projection sur F, parallèlement à G, est l'application p de E dans E telle que $p(x) = p(y+z) = y$, avec $x = y + z$ la décomposition de x suivant la somme directe $E = F \oplus G$.

Définition 205

Un endomorphisme p de E est appelé projecteur lorsque $p \circ p = p$.

Proposition 206

p est un projecteur si et seulement si il existe des sous-espaces vectoriels supplémentaires F et G tel que p soit la projection sur F parallèlement à G.
De plus, $F = \mathrm{Im}\ (p)$ et $G = \ker(p)$.

Définition 207

Une famille de projecteurs $(p_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ de E est dite associée à une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ si :

pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, p_i est une projection sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$

Proposition 208

Une famille de projecteurs $(p_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E associée à une décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$ vérifie :

1. $\forall i \in [\![1;n]\!], \quad p_i^2 = p_i$.
2. $\forall i, j \in [\![1;n]\!], \quad i \neq j \Rightarrow p_i p_j = 0$.
3. $\sum_{i=1}^{n} p_i = Id_E$.

Théorème 209

Etant donnés un sous-espace vectoriel F de E et deux sous-espaces supplémentaires G_1 et G_2 de F dans E. Le projecteur de E sur G_1 parallèlement à F définit un isomorphisme de G_2 sur G_1.

Corollaire 210

Si E est de dimension finie n et si G est un sous-espace vectoriel de E de dimension p, alors la dimension de tout supplémentaire de G dans E est $n - p$.

Proposition 211

- Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie possède un supplémentaire.
- Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie, il existe une base de E adaptée à F.
- Si $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$, il existe une base de E adaptée à $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$.

Corollaire 212

Si $E \subset F$ et $\dim E = \dim F$, alors $E = F$.

Corollaire 213

Si $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$:

$$\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i.$$

Et même mieux :

Proposition 214

Si $E = \sum_i F_i$, alors :

$$\dim E = \sum_{i=1}^{n} \dim F_i \Longleftrightarrow E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n.$$

Théorème 215 (Théorème du rang)

Lorsque E et F sont de dimensions finies. Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :

$$\dim Im(u) + \dim Ker(u) = \dim E.$$

Définition 216

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E est de dimension finie. Le rang de f, noté $rg(f)$ est la dimension de l'image de f.

Proposition 217

Si E et F sont des espaces de la même dimension finie n, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est surjective.
2. f est injective.
3. f est bijective.
4. $rg(f) = n$.

Proposition 218

Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{GL}(F,G)$, alors $rg(g \circ f) = rg(f)$.
Si $f \in \mathcal{L}(F,G)$ et $g \in \mathcal{GL}(E,F)$, alors $rg(f \circ g) = rg(f)$.

9.4 Dualité

Définition 219

Soit un E un espace vectoriel. On appelle espace dual de E, l'espace $\mathcal{L}(E,\mathbb{K})$. On le note E^*.

Définition 220

Un hyperplan d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel qui possède une droite vectorielle supplémentaire.

Proposition 221

Etant donné une forme linéaire non nul $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$. Le noyau de φ, Ker (φ) est un hyperplan de E.

Proposition 222

Si H est un hyperplan de E, il existe une forme linéaire non nulle de E telle que $H = Ker(\varphi)$.

Proposition 223

Soit $\varphi \in E^* \setminus \{0\}$ et soit $H = Ker(\varphi)$ un hyperplan de E. Une forme linéaire qui s'annule sur H est colinéaire à φ.

Définition 224

Si H est un hyperplan de E de dimension finie. Soit $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base de E, alors une équation de H est une équation de la forme :

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0.$$

telle que

$$H = \{x_1e_1 + \ldots + x_ne_n \mid a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}.$$

Cette équation est unique à un scalaire près.

Remarque: C'est une réécriture de $H = Ker\varphi$, avec $\varphi(a_1e_1 + \ldots + a_ne_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$.

Exemple: L'équation $x + 2y + 3z = 0$ défini un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.

Proposition 225

On se place dans un espace vectoriel E de dimension finie. Etant donné un vecteur a non nul, il existe une forme linéaire φ telle que $\varphi(a) = 1$.

Corollaire 226

Le vecteur nul est le seul vecteur de E sur lequel toute forme linéaire s'annule.

Définition 227

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $x \in E$, on peut écrire :

$$x = \lambda_{1,x} e_1 + \ldots + \lambda_{n,x} e_n.$$

l'application $x_i : x \mapsto \lambda_{i,x}$ est appelé la i^{eme} forme coordonnée. C'est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ et donc un élément de E^*.

Proposition 228

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*, appelée base duale de $\mathcal{B}$. On la note souvent $\mathcal{B}^*$, et on note aussi $\varphi_i = e_i^*$.

Remarque: Ainsi définie, la base duale vérifie :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j},$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon).

Exemple: $\{(1,-1),(1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Base duale ?

Corollaire 229

Lorsque E est de dimension finie, l'espace dual E^* de E est de même dimension que E.

Définition 230

Soit L est une base de E^*, telle qu'il existe une base B de E vérifiant $B^* = L$. B est appelée la base antéduale de L.

Proposition 231

Soit L est une base de E^*, elle possède une unique base antéduale.

Exemple: Base antéduale de $(x,y) \mapsto x - 3y$, $(x,y) \mapsto 2x + y$.

9.5 Rappel sur les matrices

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{f_1, \dots, f_p\}$ une base de F. On note $\mathcal{B}'^* = \{f_1^*, \dots, f_p^*\}$ duale de $\mathcal{B}'$. La matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ est :

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} f_1^*(u(e_1)) & f_1^*(u(e_2)) & \dots & f_1^*(u(e_n)) \\ f_2^*(u(e_1)) & f_2^*(u(e_2)) & \dots & f_2^*(u(e_n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_p^*(u(e_1)) & f_p^*(u(e_2)) & \dots & f_p^*(u(e_n)) \end{pmatrix}$$

Les matrices sont des représentations des morphismes relatives à des bases. Les matrices permettent de décrire par de simples opérations sur leurs coefficients les opérations $+$ et $\circ$ sur les applications linéaires.
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(u) = Mat_{\mathcal{B}}(u)$

Exercice: Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.
Calculer $A+B$, $3A$ et AB.

L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Muni de la loi $+$ et du produit externe, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel. L'ensemble des matrices carrées de taille $n \times n$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Muni en plus du produit *interne*, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une algèbre.
Attention, lorsque $n \neq p$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'a pas de produit interne.

Définition 232

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si il existe $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$MN = NM = I,$$

alors, on dit que M est inversible.
L'ensemble des matrices inversibles est noté $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

9.6 La trace

Définition 233

Soit M une matrice carrée, la trace de M, notée tr M est la somme des éléments diagonaux de M.

Remarque: Lorsqu'on note $M = (c_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;n]\!]}$, alors :
$\text{tr } M = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i}$.

Proposition 234

La trace est une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$. C'est une application linéaire.

Proposition 235

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. On a :

$$\begin{array}{l} \text{tr } AB = \text{tr } BA \\ \text{tr } P^{-1}AP = \text{tr } A \end{array}$$

Exemple: les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Proposition 236 (Rappel)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'\ -1} Mat_{\mathcal{B}'}(u) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

En notant $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ la matrice de $GL_n(\mathbb{K})$ telle que, si $x \in E$ est représenté par Y dans la base $\mathcal{B}'$ et par X dans la base $\mathcal{B}$, alors :

$$Y = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X.$$

Proposition 237

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

$$\text{tr } Mat_{\mathcal{B}}(u) = \text{tr } Mat_{\mathcal{B}'}(u).$$

On peut donc définir la notion de trace pour un endomorphisme.

Regardons la valeur de la trace dans un cas particulier

Proposition 238 (Projecteur)

Soit p un projecteur de E, tr $p = rg(p)$.

Chapitre 10

Le déterminant

Objectifs :

1. *Avoir compris et savoir utiliser le groupe symétrique.*
2. *Connaître les propriétés du déterminant.*
3. *Savoir calculer un déterminant.*

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie n et p respectivement sur $\mathbb{K}$.

10.1 Le groupe symétrique

Définition 239

On définit $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$. Ses éléments s'appellent des permutations.

Proposition 240

L'ensemble $\mathfrak{S}_n$ muni de la composition est un groupe. Ce groupe s'appelle le groupe symétrique. Son cardinal est $n!$.

On distingue plusieurs bijections remarquables dans le groupe symétrique.

Définition 241

On appelle transposition toute permutation φ telle qu'il existe deux entiers distincts i et j de $[\![1;n]\!]$ tels que :

$$\varphi(i)=j,\quad \varphi(j)=i,\quad ,\varphi(k)=k,\ \text{pour } k\in[\![1;n]\!]\setminus\{i,j\}.$$

Une telle transposition est notée $(i\ j)$.

On appelle cycle toute permutation φ telle qu'il existe p entiers distincts $i_1,\dots,i_p$ de $[\![1;n]\!]$ tels que :

$$\begin{array}{l}\forall s\in\{1,\dots,p-1\},\quad \varphi(i_s)=i_{s+1},\\ \varphi(i_p)=i_1,\\ \varphi(k)=k,\ \text{pour } k\in[\![1;n]\!]\setminus\{i_1,\dots,i_p\}.\end{array}$$

Un tel cycle est noté $(i_1\ \dots\ i_p)$. p s'appelle la longueur du cycle.

Exemple: $\mathfrak{S}_3=\{id;(1\ 2);(1\ 3);(2\ 3);(1\ 2\ 3);(1\ 3\ 2)\}$. Si $\varphi=(1\ 2\ 3)$, alors $\varphi(1)=2$, $\varphi(2)=3$, $\varphi(3)=1$.

Proposition 242

Soit $\varphi \in \mathfrak{S}_n$, il existe un entier $p \leq n$ et des transpositions $\tau_1, \ldots, \tau_p$ telles que :

$$\varphi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_p.$$

Définition 243

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit qu'un couple (i, j) de $[\![1; n]\!]^2$ est une inversion de σ si et seulement si :

$$i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j).$$

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversion de σ.

Définition 244

Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit sa signature par :

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}.$$

Proposition 245

Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Proposition 246

La signature est un morsphime de groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$.

On va maintenant étudier le cas particulier de la transposition.

Proposition 247

La signature d'une transposition est -1.

Corollaire 248

La signature d'une permutation qui se décompose en s transpositions est $(-1)^s$.

10.2 Déterminant

E est ici un espace vectoriel de dimension n.

10.2.1 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 249

Une forme n-linéaire sur E est une application f de E^n dans $\mathbb{K}$, telle que :

$$\begin{aligned}&\forall i \in [\![1; n]\!], \quad \forall (x, y, \lambda) \in E \times E \times \mathbb{K}, \quad \forall (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E^{n-1},\\ &f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x + \lambda y, x_{i+1}, \ldots, x_n) =\\ &\quad f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \lambda f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

Définition 250

Une forme n-linéaire f est dite alternée si :

$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in E^n,\quad (\exists i\neq j,\quad x_i=x_j)\Rightarrow\quad f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=0.$$

Une forme n-linéaire f est dite antisymétrique :

$$\forall(x_1,\dots,x_n),\quad \forall i\neq j,\quad f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_n)=$$
$$-f(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_n).$$

Proposition 251

Une forme n-linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

On va maintenant voir à quoi ressemble les formes n-linéaires alternées.

Proposition 252

Les formes $n-$linéaires alternées forment un espace vectoriel.

Lemme 253

Soient $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$, une base de E, et f une forme n-linéaire alternée sur E. Soit σ une permutation de $[\![1;n]\!]$. On a alors :

$$f(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)f(e_1,\dots,e_n)$$

Théorème 254

Soient $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$, une base de E, et f une forme n-linéaire alternée sur E, on a alors :

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{1,\sigma(1)}\dots x_{n,\sigma(n)}f(e_1,\dots,e_n),$$

où les $x_{i,j}$ sont les coordonnées de x_i dans la base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

Corollaire 255

L'espace des formes $n-$linéaires alternées sur E (de dimension n) est de dimension 1.

Définition 256

Le déterminant de n vecteurs $x_1,\dots,x_n$ dans une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est la forme n-linéaire alternée donnée par :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{1,\sigma(1)}\dots x_{n,\sigma(n)},$$

où les $x_{i,j}$ sont les coordonnées de x_i dans la base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

Remarque: $\det_{\mathcal{B}}(e_1,\dots,e_n)=1$.

Remarque: Il s'agit du même déterminant que celui définit en PCSI en dimension 2 et 3.

Proposition 257

Pour n vecteurs $x_1,\dots,x_n$ dans une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$,

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1),1}\dots x_{\sigma(n),n}.$$

Proposition 258

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Une famille $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(f_1, \dots, f_n) \neq 0$.

Proposition 259

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}} .$$

Application: Résolution de système de Cramer.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$$

Posons $E = \mathbb{C}^n$, $A_i = (a_{1,i}, \dots, a_{n,i})^t$ et $B = (b_1, \dots, b_n)^t$.

Supposons que la matrice $A = \begin{pmatrix} | & \dots & | \\ A_1 & \dots & A_n \\ | & \dots & | \end{pmatrix}$, représentée par ses colonnes, soit inversible. Le système possède alors une unique solution, $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n) &= \det(A_1, \dots, A_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j A_j, A_{i+1}, \dots, A_n) \\ &= x_i \det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n). \end{aligned}$$

D'où :

$$x_i = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, A_i, A_{i+1}, \dots, A_n)} = \frac{\det(A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_n)}{\det A}.$$

10.2.2 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 260

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le déterminant de u dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est par définition :

$$\det_{\mathcal{B}}(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

Ce déterminant est indépendant de la base que l'on choisit, on le notera donc $\det(u)$.

Lemme 261

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base de E, et $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de E.

$$\det_{\mathcal{B}}(u(v_1), \dots, u(v_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(v_1, \dots, v_n).$$

Proposition 262

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On a :

$$\det(u \circ v) = \det(u) \det(v).$$

Proposition 263

Un endomorphisme u est un automorphisme si et seulement si $\det(u) \neq 0$.

Application: Orientation d'un espace vectoriel de dimension 2 et 3.

10.2.3 Déterminant d'une matrice carrée

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On peut associer canoniquement à M un endomorphisme f.

Définition 264

On définit le déterminant de la matrice M par :

$$\det(M) = \det(f)$$

Proposition 265

Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :

$$\det(MN) = \det(M)\det(N).$$

Voyons maintenant une expression analytique du déterminant d'une matrice.

Proposition 266

Si $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$, alors :

$$\det(M) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}.$$

Remarque: Si P est inversible, alors $\det P \neq 0$, $\det(P^{-1}) = \dfrac{1}{\det(P)}$ et $\det(P^{-1}AP) = \det(A)$.

Proposition 267

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det({}^tM) = \det(M)$.

10.3 Calcul pratique du déterminant

Plusieurs méthodes peuvent être employées pour calculer le déterminant d'une matrice.

1. Utilisation de la multilinéarité.
2. Utilisation de l'antisymétrie.
3. Développement par rapport aux lignes ou colonnes.

Ce dernier point n'a pas été abordé.

Lemme 268

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, avec $\sigma(1) = 1$, et $\varphi \in \mathfrak{S}_{n-1}$ telle que, $(k \in \{2, \dots, n\}) \Rightarrow \varphi(k-1) = \sigma(k) - 1$, alors :

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\varphi).$$

Soit $M = (a_{i,j})_{(i,j)\in I_n^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En posant $C_i = (1\ 2\ \dots i) \in \mathfrak{S}_n$, on a :

$$\begin{aligned}
\det(M) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\sigma(1)=i} \varepsilon(\sigma) a_{1,i} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\sigma(1)=i} \varepsilon(\sigma) a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)} = \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\sigma(1)=1} \varepsilon(C_i^{-1}\circ\sigma) a_{2,C_i^{-1}\circ\sigma(2)} \dots a_{n,C_i^{-1}\circ\sigma(n)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{1,i} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\sigma(1)=1} (-1)^i \varepsilon(\sigma) a_{2,C_i^{-1}\circ\sigma(2)} \dots a_{n,C_i^{-1}\circ\sigma(n)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{1,i} \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma) a_{2,C_i^{-1}\circ\sigma(2)} \dots a_{n,C_i^{-1}\circ\sigma(n)}
\end{aligned}$$

La deuxième somme peut être vu comme le déterminant d'une sous-matrice de M. En effet, prenons la notation suivante :

$$M = \begin{pmatrix} - & - & - & a_{1,i} & - & - & - \\ b_{1,1} & \dots & b_{1,i-1} & | & b_{1,i} & \dots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots & | & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,i-1} & | & b_{n-1,i} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

La matrice $N_{1,i} = (b_{i,j})_{[\![1;n]\!]^2}$ a pour déterminant :

$$\begin{aligned}
\det(N_{1,i}) &= \sum_{\varphi\in\mathfrak{S}_{n-1}} \varepsilon(\varphi) b_{1,\varphi(1)} \dots b_{n,\varphi(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma) b_{1,\sigma(2)-1} \dots b_{n-1,\sigma(n)-1} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n,\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma) a_{2,C_i^{-1}\circ\sigma(2)} \dots a_{n,C_i^{-1}\circ\sigma(n)} \text{ ainsi } i \text{ ne peut être atteint.}
\end{aligned}$$

Et finalement :

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i a_{1,i} \det(N_{1,i}).$$

Récapitulons tout cela :

Définition 269

Pour une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit les matrices $N_{i,j}$ de manière identique à précedemment (En enlevant la i^{eme} ligne et la j^{eme} colonne de M). Cette matrice s'appelle **mineur** (i,j) de la matrice M.
L'expression $(-1)^{i+j}\det(N_{i,j})$, notée $d_{i,j}$, est le **cofacteur** (i,j) de M.
La matrice $Com\ M = (d_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]}$ est la **comatrice** de M.
La matrice $\tilde{M} =^t Com\ M$ est la **matrice complémentaire** de M

Dans ce qui précède, quitte à effectuer des permutations (antisymétrie du déterminant) pour placer la j^{eme} ligne en première position, on a montré la propriété suivante :

Proposition 270

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} d_{i,j}.$$

Ce résultat s'appelle le développement du déterminant par rapport à l'une de ses lignes.
On démontre de même que :

Proposition 271

$$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} d_{i,j}.$$

Ce résultat s'appelle le développement du déterminant par rapport à l'une de ses colonnes.

Lemme 272

Si f et g sont deux endomorphismes de E, où E est de dimension finie, tels que $f \circ g = Id_E$, alors $g \circ f = Id_E$ et $f = g^{-1}$.
Si A et B sont deux matrices carrées telles que $AB = I$, alors $BA = I$ et $B = A^{-1}$.

Théorème 273

$$M\tilde{M} = \tilde{M}M = \det(M)I.$$

Chapitre 11

Réduction d'endomorphismes

Objectifs :

1. *Savoir montrer qu'un sous-espace vectoriel est stable par un endomorphisme.*
2. *Savoir calculer le déterminant d'une matrice définie par blocs (attention : ça ne marche pas toujours).*
3. *Avoir compris la notion de polynôme d'endomorphisme.*
4. *Connaître, savoir calculer, savoir utiliser les éléments propres d'un endomorphisme.*
5. *Connaître la définition et savoir calculer le polynôme caractéristique d'une matrice ou d'un endomorphisme.*
6. *Savoir diagonaliser et trigonaliser les endomorphismes.*
7. *Connaître les applications pratiques usuelles de la diagonalisation (puissance d'une matrice, suites, équations différentielles, etc...).*

11.1 Sous-espaces stables

Définition 274

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est stable par u ou u-stable si et seulement si $u(F) \subset F$.
Dans ce cas, la restriction de u à F, peut être vu comme un endomorphisme de F. On l'appelle l'endomorphisme induit par u sur F.

On a par exemple :

Proposition 275

Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors $Ker(u)$ et $Im(u)$ sont stables par v.

Voyons une caractérisation du fait qu'un endomorphisme stabilise un sous-espace vectoriel en dimension finie.

Proposition 276

Soient E un espace de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E, soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :
F est stable par u si et seulement si sa matrice dans toute base adaptée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ à F (avec $(e_1, \ldots, e_p)$ qui est une base de F) est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

Le produit de deux matrices définies par blocs s'effectue simplement :

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1A_2 + B_1C_2 & A_1B_2 + B_1D_2 \\ C_1A_2 + D_1C_2 & C_1B_2 + D_1D_2 \end{pmatrix}.$$

Cependant il faut bien veiller à ce que les dimensions des blocs matriciels se correspondent pour pouvoir effectuer le produit.

L'un des interêts d'avoir une matrice par blocs est la simplicité du calcul du déterminant.

Proposition 277

Si une matrice M est de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

où A et C sont des matrices carrés. Alors :

$$det(M) = det(A)det(C).$$

Remarque: Attention $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ n'est en général pas égal à $\det(A)\det(D) - \det(C)\det(B)$.

Exercice: Montrer que le déterminant de la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont carrés est le produit des déterminants des blocs diagonaux. Autrement dit :

$$det \begin{pmatrix} A_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & A_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} det(A_1)\dots det(A_n).$$

On peut généraliser le résultat précédent à plusieurs espaces.

Proposition 278

Soient E un espace de dimension finie, et $(E_1, \dots, E_p)$ des sous-espaces vectoriels de E, tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :
E_i est stable par u pour tout $i \in [\![1; p]\!]$ si et seulement si sa matrice dans toute base adaptée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ est de la forme.

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où $A_i \in \mathcal{M}_{n_i}(\mathbb{K})$ avec $n_i = \dim E_i$.

Corollaire 279

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale si et seulement si pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $u(e_i)$ est colinéaire à e_i si et seulement si pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $\mathbb{K}e_i$ est stable par u.

Corollaire 280

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. La matrice M de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $i \in [\![1; p]\!]$, $u(e_i) \subset Vect(e_1, \dots, e_i)$.

11.2 Les idéaux de polynômes

Définition 281

Une partie I de $\mathbb{K}[X]$ est un idéal si elle est non vide et vérifie :

1. Pour tout $P, Q \in I$, $P + Q \in I$.
2. Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, pour tout $Q \in I$, $PQ \in I$.

Remarque: En prenant $P = -1$, on a $Q \in I \Rightarrow -Q \in I$, et pour $P = 0$, on a $0 \in I$. Donc $(I, +)$ est un groupe.

Proposition 282

Si I est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, il existe un unique polynôme unitaire P tel que $I = P\mathbb{K}[X]$. Autrement dit :

$$I = \{PQ \mid Q \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Tous les idéaux de $\mathbb{K}[X]$ s'écrivent sous cette forme.

Exemple: $I = \{P \in \mathbb{K}[X] |\ P(1) = P(-1) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

11.3 Polynômes d'endomorphismes

Définition 283

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u^n = \underbrace{u \circ \ldots \circ u}_{\text{n fois}}$ et $u^0 = id_E$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u)$ par $P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k$, c'est un endomorphisme de E. On a ainsi une application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_u : & \mathbb{K}[X] & \to & \mathcal{L}(E) \\ & P & \mapsto & P(u) \end{array}$$

Cette application est un morphisme de l'algèbre $(\mathbb{K}[X], +, ., \times)$ vers l'algèbre $(\mathcal{L}(E), +, ., \circ)$.

Remarque: On a en particulier $u^{p+q} = u^p \circ u^q = u^q \circ u^p$.

Proposition 284

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, $Im(P(u))$ et $Ker(P(u))$ sont stables par u.

Etudions plus en détail le morphisme Φ_u.

Proposition 285

Le noyau de Φ_u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appellé idéal des polynômes annulateurs de u.
L'image de Φ_u est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 286

Si E est de dimension finie, l'idéal des polynômes annulateurs de u n'est pas réduit à $\{0\}$.

Corollaire 287 (Hors programme)

Il existe donc un polynôme P unitaire, tel que Ker $(\Phi_u) = P\mathbb{K}[X]$. Ce polynôme est unique et s'appelle le polynôme minimal de u.

11.4 Eléments propres des endomorphismes

Définition 288

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas injectif.

Remarque: Ce qui revient à dire qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Remarque: Dans le cas de la dimension finie, c'est équivalent à dire que $u - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif.

Définition 289

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, un élément $x \in E \setminus \{0\}$ est un vecteur propre de u s'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ (ce qui fait de λ une valeur propre de u).

Définition 290

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u. On définit le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ, qu'on note $E_\lambda(u)$ par :

$$E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E).$$

C'est un sous-espace vectoriel de E comme noyau d'une application linéaire, et $E_\lambda(u) \setminus \{0\}$ est l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Remarque: $E_\lambda(u)$ est stable par u.

Définition 291

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit le spectre de u, noté $Sp(u)$ comme l'ensemble de toutes les valeurs propres de u.

Exemple: Trouver les éléments propres de $f(x, y) = (3x - y; y - x)$.

11.4.1 Structure des sous-espaces propres

Proposition 292

Si deux endomorphismes u et v commutent, les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont stables par v.

Proposition 293

Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs propres d'un endomorphisme u associé à des valeurs propres deux à deux distinctes, alors $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Proposition 294

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes d'un endomorphisme u, alors $E_{\lambda_1}(u) \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p}(u)$.

11.4.2 Propriétés des valeurs propres

Proposition 295

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in Sp(u)$, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$.

Corollaire 296

Si $P(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est une racine de P. Autrement dit :

$$Sp(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \ \mid P(\lambda) = 0\}$$

Application: Valeurs propres d'un projecteur.

11.5 Eléments propres des matrices carrées

Définition 297

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les éléments propres (valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre) de M sont les éléments propres de l'endomorphisme canoniquement associé à M, c'est-à-dire l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M.

Proposition 298

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons $Sp_{\mathbb{R}}(M)$ son spectre. On peut considérer M comme une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notons $Sp_{\mathbb{C}}(M)$ son spectre. On a :

$$Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset Sp_{\mathbb{C}}(M).$$

Définition 299

Soit $A \in \mathcal{GL}(n)$, on définit l'automorphisme d'algèbre :

$$\begin{array}{rccc} \theta_A : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \mapsto & AMA^{-1} \end{array}$$

Définition 300

Deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M et N, sont semblables si et seulement il existe $P \in \mathcal{GL}(n)$ tel que :

$$M = PNP^{-1}.$$

Remarque: Deux matrices sont semblables lorsqu'elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Proposition 301

Deux matrices semblables ont même spectre.

11.6 Polynôme caractéristique

Définition 302

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de M, noté χ_M, est un polynôme défini par :

$$\chi_M = det(XI_n - M).$$

Définition 303

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, E de dimension finie, le polynôme caractéristique de u, noté χ_u, est un polynôme défini par :

$$\chi_u = det(XId_E - u).$$

Proposition 304

Le polynôme caractéristique de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de degré n.

Proposition 305

Les racines du polynôme caractéristique sont exactement les valeurs propres de M.

Remarque: Attention au passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$.

Définition 306

Si λ est une valeur propre de M, la multiplicité de λ comme valeur propre de M, notée $mult(\lambda)$ est la multiplicité de λ comme racine de χ_M.
Autrement dit $\chi_M = (X-\lambda)^{mult(\lambda)}P$, avec $P(\lambda) \neq 0$.

Proposition 307

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\chi_M(X) = X^n - \text{tr } (M)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n det(M).$$

Corollaire 308

Si χ_M est scindé, alors $\det(M)$ est le produit des valeurs propres et tr (M) est la somme des valeurs propres :

$$\begin{aligned} det(M) &= \prod_{\lambda \in Sp(M)} \lambda^{mult(\lambda)} \\ \text{tr } (M) &= \sum_{\lambda \in Sp(M)} \lambda^{mult(\lambda)} \end{aligned}$$

Remarque: Tout ce qui précède, écrit en terme de matrices, est aussi valable pour des endomorphismes.

Théorème 309 (Cayley-Hamilton)

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\chi_M(M) = 0.$$

11.7 Diagonalisation et trigonalisation des endomorphismes

Dans tout le paragraphe, les espaces vectoriels sont de dimensions finies.

Définition 310

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u).$$

Proposition 311

Si u est diagonalisable et si l'on note $(p_\lambda)_{\lambda \in Sp(u)}$ la famille de projecteurs associés à la décomposition $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$:

$$u = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \lambda p_\lambda.$$

Proposition 312

Soit u un endomorphisme de E. S'il existe une décomposition de $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ telle que u induise une homothétie sur chacun des E_i, alors u est diagonalisable et réciproquement.

Proposition 313

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u, ou encore s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Proposition 314

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de E :

$$\dim\ E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim\ E_\lambda.$$

Proposition 315

Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$.

Corollaire 316

Si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est scindé à racines simples, alors cet endomorphisme est diagonalisable.

Remarque: La réciproque est fausse comme on le voit en prenant $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarque: Dans ce cas, l'endomorphisme possède n valeurs propres distinctes et donc nécessairement tous les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Proposition 317

Pour qu'un endomorphisme u de E soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'il annule le polynôme $\prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)$.

Proposition 318

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par u, l'endomorphisme de F induit par u sur F l'est aussi.

Définition 319

Un endomorphismes u de E est trigonalisable si et seulement s'il existe une base de E telle que la matrice associée à u dans cette base soit triangulaire supérieure.

11.8 Diagonalisation et trigonalisation des matrices carrées

Définition 320

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp. trigonalisable) si l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ qu'elle représente dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est diagonalisable (resp. trigonalisable).

Proposition 321

Une matrice carrée M est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale (resp. triangulaire supérieure).

Proposition 322

Lorsque M est diagonalisable, M s'écrit sous la forme PDP^{-1}, où D est diagonale et où P désigne la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ à une base de vecteurs propres de M, et les colonnes de P sont les vecteurs propres de M.

Chapitre 12

Algèbre bilinéaire

Objectifs :

1. *Connaître et savoir utiliser les produits scalaires classiques.*
2. *Savoir montrer qu'une application est un produit scalaire.*
3. *Maîtriser la notion d'orthogonalité.*
4. *Maîtriser la méthode d'orthonormalisation de Schmidt.*
5. *Avoir compris et savoir utiliser les projecteurs orthogonaux.*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

12.1 Les espaces préhilbertiens

12.1.1 Formes bilinéaires symétriques

Définition 323

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, une forme bilinéaire symétrique φ sur E est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

1. Pour tout $x \in E$, l'application $\varphi_x : y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.
2. Pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$.

Remarque: il en résulte que pour tout $y \in E$, l'application $\varphi_y : x \mapsto \varphi(x, y)$ est aussi linéaire.

Proposition 324

L'ensemble des applications bilinéaires symétriques muni des lois + et . est un espace vectoriel :

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) \text{ et } (\lambda.\varphi)(x, y) = \lambda\varphi(x, y).$$

Définition 325

Si φ est une forme bilinéaire symétrique, on lui associe l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(x) = \varphi(x, x)$. Φ est appelée forme quadratique sur E associée à φ.

Proposition 326

L'ensemble des formes quadratiques sur E constitue un espace vectoriel.

Proposition 327

Si φ est une forme bilinéaire symétrique et Φ sa forme quadratique associée, on a les égalités suivantes :

1. $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y) + 2\varphi(x,y)$.
2. $\Phi(x-y) = \Phi(x) + \Phi(y) - 2\varphi(x,y)$.
3. $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y))$.
4. $\varphi(x,y) = \frac{1}{4}(\Phi(x+y) - \Phi(x-y))$.

Les deux dernières égalités s'appellent les identités de polarisation.

Définition 328

Une forme quadratique est dite positive quand pour tout $x \in E$, $\Phi(x) \geq 0$. Une forme bilinéaire symétrique est dite positive quand sa forme quadratique associée est positive.
Une forme quadratique est dite définie positive quand pour tout $x \in E$ non nul, $\Phi(x) > 0$. Une forme bilinéaire symétrique est dite définie positive quand sa forme quadratique associée est définie positive.

Remarque: Une forme bilinéaire symétrique est définie positive, si et seulement si elle est positive et

$$\varphi(x,x) = 0 \iff x = 0.$$

Proposition 329 (Cauchy-Schwarz)

Si φ est une forme bilinéaire symétrique positive et Φ sa forme quadratique associée, alors

$$\varphi(x,y)^2 \leq \Phi(x)\Phi(y)$$

Si φ est définie positive, il y a égalité si et seulement si (x,y) est liée.

Proposition 330 (Inégalité de Minkowski)

Soit Φ une forme quadratique positive, et φ sa forme bilinéaire symétrique associée, alors pour tout $x, y \in E$:

$$\sqrt{\Phi(x+y)} \leq \sqrt{\Phi(x)} + \sqrt{\Phi(y)}.$$

Si φ est définie positive, il y a égalité si et seulement si (x,y) est liée.

12.1.2 Cas réel

Définition 331

Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, un produit scalaire φ sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Définition 332

Un espace préhilbertien réel est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. On le note (E,φ) ou simplement E lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple: Voyons plusieurs exemples d'espaces préhilbertiens réels :

- $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
- $C^0([a;b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) = \int_a^b fg$.
- $C^0([a;b],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f,g) = \int_a^b fgw$ où w est une fonction continue strictement positive.

Proposition 333 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. On a alors :

$$\forall x, y \in E, \quad (x|y)^2 \leq (x|x)(y|y).$$

Il y a égalité si et seulement si (x, y) est liée.

Remarque: L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit aussi $|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}$.

Proposition 334

Soit $(E, (.|.))$ un espace préhilbertien réel. L'application

$$N : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$$

est une norme sur E. La norme de x est noté $\|x\|_2$ ou bien $\|x\|$ quand il n'y a pas ambiguïté. C'est la norme associée au produit scalaire.

Exercice: Quand l'inégalité triangulaire est-elle une égalité ?

Définition 335

A partir de la norme, on construit la distance, appelé distance induite par le produit scalaire définie par :

$$d(x, y) = \|x - y\|_2.$$

12.1.3 Cas complexe

Définition 336

Soit E et F des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, une application $f : E \to F$ est semi-linéaire si :

$$\forall (x, y) \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, f(x + \lambda y) = f(x) + \overline{\lambda} f(y).$$

Définition 337

Soit E un $\mathbb{C}-$espace vectoriel, un produit scalaire φ sur E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive, c'est-à-dire :

1. $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ (forme).
2. Pour tout $x_0 \in E$, $\varphi_{x_0} : y \mapsto \varphi(x_0, y)$ est linéaire.
3. Pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ (hermitienne).
4. Si $\varphi(x, x) = 0$, alors $x = 0$ (définie).
5. Pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}^+$ (positive).

Les deux derniers axiomes sont équivalents à : Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(x, x) > 0$.

Remarque: Il en résulte que pour tout $y_0 \in E$, $\varphi_{y_0} : x \mapsto \varphi(x, y_0)$ est semi-linéaire. On dit que φ est sesquilinéaire.

Définition 338

Un espace préhilbertien complexe est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. On le note (E, φ) ou simplement E lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple: Voyons plusieurs exemples d'espaces préhilbertiens réels :

– $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire $(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i$.

- $C^0([a;b],\mathbb{C})$ muni du produit scalaire $(f,g)=\displaystyle\int_a^b \overline{f}g$.
- $C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ (fonctions continues $2\pi-$périodique) muni du produit scalaire $(f,g)=\frac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\overline{f}g$.

Proposition 339 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien complexe. On a alors :

$$\forall x,y\in E,\quad |(x|y)|^2\leq (x|x)(y|y).$$

Il y a égalité si et seulement si (x,y) est lié.

Proposition 340

Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien complexe. L'application

$$N : x\mapsto \sqrt{(x|x)}$$

est une norme sur E. La norme de x est noté $\|x\|_2$ ou bien $\|x\|$ quand il n'y a pas ambiguïté. C'est la norme associée au produit scalaire.

Exercice: Quand l'inégalité triangulaire est-elle une égalité ?

Définition 341

A partir de la norme, on construit la distance, appelé distance induite par le produit scalaire définie par :

$$d(x,y)=\|x-y\|_2.$$

Proposition 342

Soit $x,y\in E$,

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2+2\Re(x|y).$$

Exercice: Calculer $\|x-y\|$, $\|x+iy\|$, $\|x-iy\|$. En déduire une expression de $(x|y)$ en termes de normes.

12.1.4 Orthogonalité

Soit $(E,(.|.))$ un espace préhilbertien réel ou complexe.

Définition 343

Un vecteur x de E est dit unitaire si $\|x\|=1$.

Remarque: Un vecteur unitaire est nécessairement non nul.

Définition 344

Soit x et y deux vecteurs de E, ils sont dits orthogonaux si et seulement si $(x|y)=0$. On le note $x\perp y$.

Définition 345

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthogonale si :

$$\forall (i,j)\in I,\quad i\neq j\Rightarrow x_i\perp x_j.$$

Une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ est dite orthonormale si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires.

Proposition 346

Une famille de vecteurs orthogonale est libre.

Remarque: Une sous-famille d'une famille orthogonale (resp. orthonormale) est orthogonale (resp. orthonormale).

Exercice: Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire :

$$\left(\sum_{n=0}^{p} a_n X^n \middle| \sum_{n=0}^{q} b_n X^n\right) = \sum_{k=0}^{max(p,q)} a_k b_k.$$

Montrer que les $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ constituent une famille orthonormale.

Proposition 347 (Pythagore)

Soit $(x_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une famille finie orthogonale de vecteurs. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2.$$

Remarque: La réciproque est fausse, dès que $n > 2$.

Exemple: Si x et y sont fixés, on prend z tel que $(x + y|z) + (x|y) = 0$, alors $\|x + y + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2$ et pourtant la famille (x, y, z) n'est pas forcément orthogonale.

Définition 348

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E, ils sont orthogonaux si :

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad x \perp y.$$

F et G sont alors en somme directe. On le note $F \perp G$.

Définition 349

Soit F un espace vectoriel de E. On définit $F^\perp$ (ou F°) par :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \quad (x|y) = 0\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque: $E^\perp = \{0\}$ et $\{0\}^\perp = E$.

Définition 350

Des sous-espaces vectoriels $(F_i)_{i\in I}$ sont dits supplémentaires orthogonaux s'ils sont deux à deux orthogonaux et si $E = \bigoplus_{i\in I} F_i$. Dans ce cas la somme est directe, et on note :

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{i\in I}} F_i.$$

12.2 Espaces euclidiens

Définition 351

Un espace euclidien est un espace préhibertien réel de dimension finie.

12.2.1 Bases orthonormales

Définition 352

Une base orthonormale est une base dont les vecteurs constituent une famille orthonormale.

Proposition 353

Dans un espace euclidien, il existe des bases orthonormales.

Théorème 354

L'application :

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \to & E^* \\ & x & \mapsto & (x|.) \end{array}$$

est un isomorphisme, appelé isomorphisme canonique.

Corollaire 355

Pour toute forme linéaire f sur E, il existe un unique $a \in E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = (a|x).$$

Proposition 356

Soit E un espace euclidien et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E, alors, si :

$$x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \text{ et } y = y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n,$$

alors :

$$\begin{array}{rcl} \|x\| & = & \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \\ (x|y) & = & x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \\ d_2(x,y) & = & \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \end{array}$$

Définition 357

Un espace hermitien est un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

Exercice: Etendre les propriétés précédentes aux espaces hermitiens.

12.2.2 Projections orthogonales

Proposition 358

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E, alors :

1. $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} F^{\perp}$.
2. $\dim E = \dim F + \dim F^{\perp}$.
3. $F = F^{\perp\perp}$.

Remarque: Attention, ceci est en général faux en dimension infinie.

Exemple: Si $E = C^0([0;1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E \,|f(0) = 0\}$, alors $F \neq E$ et pourtant $F^{\perp} = \{0\}$.

Proposition 359

Soit $(u_1, \dots, u_k)$ une famille orthonormale d'un espace euclidien E de dimension n, alors il existe une base orthonormale $(u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_{n-k})$ de E

Définition 360

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E de dimension n, alors on définit $p_F^\perp$ qui est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$, c'est le projecteur orthogonal sur F.

Proposition 361

Soit x un vecteur d'un espace euclidien E et F un sous-espace vectoriel de E.

$$\|x - p_F^\perp(x)\| = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Remarque: On va voir comment construire un projecteur si E est de dimension infinie. Par contre, F restera de dimension finie.

12.3 Retour aux espaces préhilbertiens

Proposition 362

Soit E un espace préhilbertien réel (de dimension finie ou non), l'orthogonal F° d'un sous-espace vectoriel de dimension finie F est un supplémentaire de F. Appelé supplémentaire orthogonal de F.

Définition 363

Pour $x \in E$, et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F de dimension finie, alors $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i$ est appelé la projection orthogonale de x sur F, notée $p_F^\perp(x)$. De plus, $x - p_F^\perp(x) \in F^o$.

Proposition 364

L'application $p_F^\perp : E \to E$ est un endomorphisme de E.

Définition 365

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien réel (de dimension finie ou non), pour $x \in E$, on définit la distance de x à F par :

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|.$$

Proposition 366

La fonction $z \in F \mapsto \|x - z\|$ admet son minimum en un unique point qui est $p_F^\perp(x)$. On a :

$$d(x, F) = \|x - p_F^\perp(x)\|.$$

Corollaire 367

Pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \|p_F^\perp(x)\|^2 + d(x, F)^2$.

Corollaire 368 (Inégalité de Bessel)

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est base orthonormale de F, pour tout $x \in E$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |(e_i|x)|^2 \leq \|x\|^2$.

Exercice: Etendre les propriétés précédentes aux espaces préhilbertiens complexes.

Dans le cas général, si $E = F \overset{\perp}{\bigoplus} G$, le projecteur sur F parallèlement à G est appelé projecteur orthogonal sur F.

Chapitre 13

Endomorphismes d'un espace euclidien

Objectifs :

1. *Définition, construction et utilisation de l'adjoint d'un endomorphisme.*
2. *Définition et utilisation d'un endomorphisme autoadjoint.*
3. *Définition et utilisation d'un automorphisme orthogonal.*
4. *Réduction des automorphismes orthogonaux.*
5. *Réduction des endomorphismes autoadjoints.*

Dans ce chapitre, E désignera un espace euclidien. Pour x et y dans E, on désignera par $(x|y)$ le produit scalaire de x et y.

13.1 Adjoint d'un endomorphisme

Définition 369

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad (u^*(x)|y) = (x|u(y)).$$

u^* s'appelle l'adjoint de u.

Remarque: L'adjoint de l'identité de E est l'identité de E.

Proposition 370

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u^*) =^t Mat_{\mathcal{B}}(u).$$

Exercice: Pourquoi $\mathcal{B}$ doit-elle être orthonormale ?

Corollaire 371

L'application $\varphi : u \mapsto u^*$ est un endomorphisme involutif de $\mathcal{L}(E)$.
Ce qui signifie que pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^* \text{ et } u^{**} = u.$$

En utilisant la même remarque, on a :

Corollaire 372

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $(uv)^* = v^*u^*$.

Corollaire 373

Si $u \in \mathcal{GL}(E)$, alors $u^* \in \mathcal{GL}(E)$ et $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$.

Proposition 374

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u) = \det(u^*)$ et $tr(u^*) = tr(u)$.

13.2 Endomorphismes autoadjoints

Définition 375

Un endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$ est dit autoadjoint (ou symétrique) si :

$$\forall x, y \in E, \quad (u(x)|y) = (x|u(y))$$

Proposition 376

Les endomorphismes autoadjoints constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Proposition 377

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint si et seulement si $u = u^*$.

Proposition 378

Un endomorphisme p est un projecteur orthogonal si et seulement si :

$$p^2 = p \text{ et } p^* = p.$$

13.3 Automorphismes orthogonaux

Définition 379

Un automorphisme u de E est orthogonal si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\forall x, y \in E, \quad (u(x)|u(y)) = (x|y).$$

Proposition 380

Si un automorphisme u de E est orthogonal, alors u^* est orthogonal.

Proposition 381

Soit u un automorphisme de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. u est orthogonal.
2. u conserve la norme, autrement dit pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$.
3. $uu^* = u^*u = Id_E$.

Proposition 382

Un endomorphisme u est un automorphisme orthogonal si et seulement si l'image par u de toute base orthonormale est orthonormale si et seulement si l'image par u d'une base orthonormale est orthonormale.

Définition 383

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E est un groupe pour la composition. On l'appelle le groupe orthogonal de E, on le note $\mathcal{O}(E)$.

Définition 384

Lorsque p est un projecteur orthogonal, $s = Id_E - 2p$ est appellée symétrie orthogonale. Lorsque $\ker(p)$ est un hyperplan, on dit que s est une réflexion.

Proposition 385

Une symétrie orthogonale est un automorphisme orthogonal et autoadjoint.

Remarque: $s \circ s = id_E$.

Proposition 386

Un automorphisme orthogonal et autoadjoint est une symétrie orthogonale.

13.3.1 Passage aux matrices

Définition 387

Une matrice M est dite orthogonale si et seulement si elle est la matrice d'un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$ (muni de sa structure euclidienne usuelle) dans la base canonique (qui est donc orthonormale). Les matrices orthogonales forment un groupe, appelé groupe orthogonal et noté $\mathcal{O}(n)$.

Il résulte des propriétés des automorphismes autoadjoints la propriété suivante :

Proposition 388

M est une matrice orthogonale si et seulement si :

$$M\,{}^tM = I$$

Ce qui équivaut encore à ${}^tMM = I$.

Exemple:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Corollaire 389

Une matrice carrée M est orthogonale si et seulement si les colonnes de M, $C_1, \ldots, C_n$ forment une base orthonormale si et seulement si les lignes de M, $L_1, \ldots, L_n$ forment une base orthonormale.

Proposition 390

- Un endomorphisme est autoadjoint si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est symétrique.
- Un automorphisme est orthogonal si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale est orthogonale.

Proposition 391

La matrice de passage entre deux bases orthonormales est orthogonale.

13.3.2 Déterminants et réduction des automorphismes orthogonaux.

Proposition 392

Si M est une matrice orthogonal, $\det(M) \in \{-1; 1\}$.

Corollaire 393

Si u est un automorphisme orthogonal, $\det(u) \in \{-1; 1\}$.

Proposition 394

Si u est une réflexion, alors $\det(u) = -1$.

Définition 395

Soit u un automorphisme orthogonal de E, lorsque $\det(u) = 1$, on dit que u est une rotation.

Etude en dimension 2 et 3

Proposition 396

Si E est de dimension 2, et u une rotation, il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est :

$$M_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Proposition 397

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$M_2(\theta + \theta') = M_2(\theta)M_2(\theta') \text{ et } M_2(\theta)^{-1} = M_2(-\theta).$$

Lemme 398

Le spectre réel d'un automorphisme u orthogonal est inclus dans $\{-1; 1\}$.
Le spectre complexe d'un automorphisme u orthogonal est inclus dans $\mathbb{U}$.

Lemme 399

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors si u est un endomorphisme.
F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u^*.

Lemme 400

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors si u est un automorphisme orthogonal.
F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u.

Proposition 401

Si E est de dimension 3, et u est une rotation, il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Proposition 402

Pour tout $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a :

$$M_3(\theta + \theta') = M_3(\theta)M_3(\theta') \text{ et } M_3(\theta)^{-1} = M_3(-\theta).$$

13.4 Réduction des endomorphismes autoadjoints

Lemme 403

Soit u un endomorphisme de E, alors :

$$\ker(u) = (\mathrm{Im}\ (u^*))^{\perp} \quad \mathrm{Im}\ (u) = (\ker(u^*))^{\perp}.$$

Proposition 404

Pour un endomorphisme u autoadjoint, le noyau et l'image sont des supplémentaires orthogonaux.

Proposition 405

Les sous-espaces propres d'un endomorphisme autoadjoint sont orthogonaux.

Proposition 406

Soit $E \neq \{0\}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, alors le spectre de u est inclus dans $\mathbb{R}$.

Théorème 407

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Alors E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u. En particulier, u est diagonalisable dans une base orthonormale.

Proposition 408

Si M est une matrice symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale P tel que ${}^tPMP$ est diagonale.

Proposition 409

Soit B une forme bilinéaire symétrique sur un espace euclidien E. Il existe un unique endomorphisme autoadjoint u tel que :

$$\forall x, y \in E, \quad B(x,y) = (u(x)|y).$$

Remarque: En diagonalisant l'endomorphisme u dans une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ on obtient, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$:

$$B(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i y_i,$$

où les λ_i sont les valeurs propres de u.

Chapitre 14

Courbes de l'espace et du plan

Objectifs : Savoir étudier un arc paramétré.

14.1 Courbes paramétrées

Définition 410

Une courbe paramétrée (ou arc paramétré) de classe C^k, est un couple (I, f), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une application de classe C^k de I dans $\mathbb{R}^p$, avec $p = 2$ ou 3.

Exemple: Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(t) = (cos(2t), cos(3t))$. $(\mathbb{R}, f)$ est un arc paramétré.

Définition 411

Deux arcs de classe C^k (I, f) et (J, g) sont dits C^k−équivalents si et seulement si il existe un C^k−difféomorphisme $\theta : J \to I$ tel que $f = g \circ \theta$.
Une classe d'équivalence pour cette relation est appelée arc géométrique.
Un représentant d'une telle classe s'appelle un paramétrage de l'arc géométrique.

Remarque: Deux arcs C^k−équivalents définissent la même courbe.

Remarque: On dit de θ que c'est un paramétrage admissible.

Définition 412

Deux arcs de classe C^k (I, f) et (J, g) sont dits équivalents et de même sens si et seulement si il existe un C^k−difféomorphisme croissant $\theta : J \to I$ tel que $f = g \circ \theta$.
Une classe d'équivalence pour cette relation est appellée arc géométrique orienté.

Exemple: Soit $([0; 2\pi[, f)$ un arc paramétré, avec $f : t \to (cos(t), sin(t))$. Soit $([0; 2\pi[, g)$ un arc paramétré, avec $g : t \to (\cos(-t), \sin(-t))$. Ces deux arcs sont équivalents, mais pas de même sens.

Définition 413

1. Un point $M = f(t)$ d'un arc paramétré (I, f) est dit multiple s'il existe $t, t' \in I$ avec $t' \neq t$ tels que $f(t) = f(t')$.
2. Un point d'un arc paramétré est dit simple s'il n'est pas multiple.
3. Un arc paramétré est dit simple si tous ses points sont simples.

Exemple: Dans l'exemple précédent, $([0; 2\pi[, f)$ est simple, mais pas $([0; 2\pi], f)$.

14.2 Etude locale d'un arc orienté

Dans ce paragraphe, on considère un arc paramétré (I, f) de classe C^k, avec $k \geq 1$ aussi grand que l'on en aura besoin.

Définition 414

1. Un point $M = f(t)$ est dit régulier si $f'(t) \neq 0$.
2. Un point qui n'est pas régulier est stationnaire.
3. Un arc dont tous les points sont réguliers est appelé arc régulier.

Exercice: Donner en tout point une expression d'un vecteur unitaire tangent à l'arc.

Définition 415

On dit qu'un arc paramétré admet une tangente en $M = f(t)$ si il existe un entier plus petit entier k tel que $f^{(k)}(t)$ soit non nulle. Dans ce cas, la tangente est la droite $M + f^{(k)}(t)\mathbb{R}$.

Proposition 416

Si $M = f(t)$ est un point régulier, alors l'arc paramétré admet une tangente en M qui est $M + f'(t)\mathbb{R}$.

Exemple: $f(t) = (t^2, t)$ admet une tangente verticale en $(0, 0)$.

Remarque: Si f représente la trajectoire d'un point matériel, les grandeurs $f'(a)$ et $f''(a)$ représentent respectivement les vecteurs vitesse et l'accélération du point matériel à l'instant $t = a$.

Définition 417

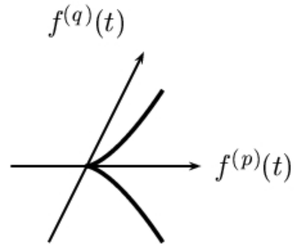
Un point $M = f(t)$ est dit birégulier si et seulement si $(f'(t), f''(t))$ constitue une famille libre.

Remarque: En un point birégulier, une courbe plane admet une tangente dirigée par $f'(t)$ et la courbure est dirigée par $f''(t)$.

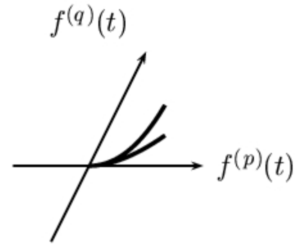
Proposition 418

Soit $M = f(t)$, soit p le plus petit entier tel que $f^{(p)}(t) \neq 0$, et q le plus petit entier tel que $(f^{(p)}(t), f^{(q)}(t))$ soit une famille libre, alors au voisinage de M l'allure de la courbe est :

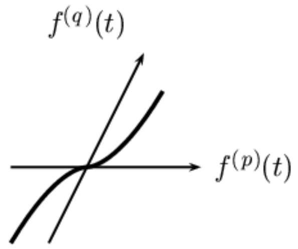
Si p est pair et q est impair



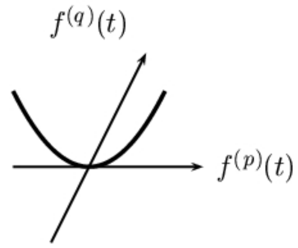
Si p est pair et q est pair



Si p est impair et q est impair



Si p est impair et q est pair



Remarque: Dans les deux premiers cas, on dit que l'arc admet une demi-tangente en M.

Application: Etudier en $(0,0)$ l'arc $(\mathbb{R}, f)$ avec $f : t \mapsto \left(t^2 sin(t), \dfrac{e^t - 1 - t}{t}\right)$, prolongée par continuité en 0.

Cas des courbes définies en polaire

Supposons que l'arc orienté Γ est défini par la fonction de classe C^1 $\theta \mapsto \rho(\theta)$. Un paramétrage de cet arc est donc $(\mathbb{R}, f)$, avec $f : t \mapsto (\rho(t)\cos(t), \rho(t)\sin(t))$. On a donc :

$$f'(t) = (-\rho(t)\sin(t) + \rho'(t)\cos(t), \rho(t)\cos(t) + \rho'(t)\sin(t)).$$

$\|f'(t)\|_2^2 = \rho(t)^2 + \rho'(t)^2$, et donc $f'(t)$ ne peut donc s'annuler que pour $\rho(t) = 0$. Pour une courbe en polaire, à part en $(0,0)$ les points sont soit d'allures birégulières, soit des points d'inflexion (pas de point de rebroussement). Pour l'étude en $(0,0)$, on repasse au coordonnées cartésiennes.

14.3 Etude asymptotique des arcs orientés

14.3.1 Cas d'une courbe paramétrique

Si $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $\pm\infty$ lorsque t tend vers a, on étudie $l = \lim_{t \to a} \dfrac{y(t)}{x(t)}$ (Si seulement l'un des deux tend vers $\pm\infty$, on a alors clairement une asymptote verticale ou horizontale) :

1. Si $l = 0$, on a une branche parabolique de direction Ox.

2. Si $l = \pm\infty$, on a une branche parabolique de direction Oy.
3. Si $l \in \mathbb{R}$, on étudie $p = \lim_{t \to a} y(t) - lx(t)$:
   (a) Si $p = \pm\infty$ on a une branche parabolique selon la droite $y = lx$.
   (b) Si $p \in \mathbb{R}$, la droite $y = lx + p$ est asymptote.

Attention, toutes ces limites peuvent ne pas exister. Dans ce cas, on ne peut rien dire.

14.3.2 Cas d'une courbe en polaire

Si $\lim_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) = \pm\infty$, alors on étudie la limite de $\lim_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) \sin(\theta - \theta_0)$, qui représente la "distance limite" entre la courbe et la droite passant par l'origine qui fait un angle θ_0 avec Ox. Si cette limite existe et vaut $l \in \mathbb{R}$, on a une asymptote, qui est la droite parallèle à la droite qui fait un angle θ_0 avec Ox et distante de l de celle-ci. Si cette limite existe et vaut $\pm\infty$, alors on a une direction asymptotique selon la droite qui fait un angle θ_0 avec Ox.

14.4 Etude métrique d'un arc orienté

Ici $\mathbb{R}^k$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

Définition 419

Si Γ est un arc orienté régulier, un paramétrage normal est un paramétrage (J, g) de classe C^k $(k \geq 1)$, tel que pour tout $t \in J$, $g'(t)$ soit unitaire.

Proposition 420

Un tel paramétrage existe et est unique.

Pour cela, on a besoin de la définition :

Définition 421

Soit (I, f) un arc paramétré de classe C^k $(k \geq 1)$, une abscisse curviligne de cette arc est une fonction $s : I \to \mathbb{R}$, tel que $s' = \|f'\|_2$. (Une telle fonction existe bien par primitivation). Cette fonction est de même régularité que f (au moins de classe C^1).

Remarque: Pour un paramétrage normal, on note traditionnellement la variable s, ce qui correspond au paramétrage par l'abscisse curviligne.

Définition 422

Si Γ est arc orienté, et si (I, f) est un paramétrage de classe C^k $(k \geq 1)$ de Γ, alors la longueur de Γ est

$$\ell(\Gamma) = \int_I \|f'(t)\|_2 dt.$$

Remarque: Si (J, g) est un paramétrage normal de Γ, alors la longueur Γ est la longueur de l'intervalle J.

Exercice: Calculer la longueur de l'arc paramétré par $([0; 2\pi[, f)$, avec $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. Est-ce un paramétrage normal ?

Définition 423

Si Γ est arc orienté, et si (I, f) est un paramétrage normal de Γ, alors le vecteur unitaire tangent à Γ en $f(s)$ est $\vec{T}(s) = f'(s)$. On note $\vec{N}(s)$ le vecteur tel que $(f(s); \vec{T}(s); \vec{N}(s))$ forme un repère orthonormal direct. Ce repère est appelé repère de Frenet de Γ en $f(s)$.

Proposition 424

$\vec{T}'(s)$ est colinéaire à $\vec{N}(s)$.

Définition 425

La courbure algébrique de la courbe en $f(s)$ est le réel $K(s)$ tel que $\vec{T}'(s) = K(s)\vec{N}(s)$. La courbure est $c(s) = |K(s)|$ et le rayon de courbure est $R(s) = \dfrac{1}{c(s)}$.

Remarque: Le signe de la courbure algébrique dépend du sens où on tourne.

Proposition 426

$\vec{N}(s) = -K(s)\vec{T}(s)$

Calcul explicite de la courbure en coordonnées cartésiennes

Supposons donné un arc paramétré par $f : t \mapsto (x(t), y(t))$. Le vecteur tangent unitaire en $M = f(t)$ est donné par $\vec{T}_t(t) = \left(\dfrac{x'(t)}{s'(t)}; \dfrac{y'(t)}{s'(t)}\right)$, avec $s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Ceci donne :

$$
\begin{aligned}
\vec{T}_t'(t) &= \left(\frac{x''s' - x's''}{s'^2}; \frac{y''s' - y's''}{s'^2}\right) \\
&= \left(\frac{x''s'^2 - x's''s'}{s'^3}; \dots\right) \\
&= \left(\frac{x''(x'^2 + y'^2) - x'(x'x'' + y'y'')}{s'^3}; \dots\right) \\
&= \left(y'\frac{x''y' - x'y''}{s'^3}; \dots\right)
\end{aligned}
$$

Or $\vec{T}(s(t)) = \vec{T}_t(s^{-1}(s(t))$, donc $\vec{T}(s) = \vec{T}_t(s^{-1}(s))$ et :

$$\vec{T}'(s) = \frac{1}{s'(s^{-1}(s))}\vec{T}_t'(s^{-1}(s)),$$

ce qui donne

$$\vec{T}'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)}\vec{T}_t'(t) = \left(y'\frac{x''y' - x'y''}{s'^4}; \dots\right).$$

Comme $\vec{N}_t(t) = \left(-\dfrac{y'(t)}{s'(t)}; \dfrac{x'(t)}{s'(t)}\right)$, cela donne

$$K(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En polaire, on reparamétrise la courbe par la fonction $f : \theta \mapsto (\rho(\theta)\cos\theta; \rho(\theta)\sin\theta)$. Ce qui donne après calcul :

$$K(t) = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Chapitre 15

Les Espaces Vectoriels Normés

Objectifs :

1. *Savoir démontrer qu'une application est une norme.*
2. *Savoir à quoi ressemble une boule pour les normes usuelles. Savoir tracer une boule dans le cas contraire.*
3. *Savoir étudier la convergence d'une suite.*
4. *Savoir montrer qu'une application est $k-$lipschitzienne.*
5. *Savoir montrer que deux normes sont équivalentes, ou qu'elles ne le sont pas.*
6. *Avoir compris la signification des relations de comparaison entre les suites.*
7. *Savoir montrer qu'une partie est ouverte ou ne l'est pas. Savoir montrer qu'une partie est fermée, ou ne l'est pas.*

15.1 Les Normes

Dans tout le paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 427

Une norme sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie :

1. $\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
2. $\forall(x, y) \in E^2, \quad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
3. $\forall x \in E, \quad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Définition 428

Un couple (E, N) où E est un espace vectoriel et N est une norme sur E est appelé un espace vectoriel normé. On dira aussi que E est un espace vectoriel normé.

Exemple: Normes N_1, N_2, N_∞ sur $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{C}([a; b])$.

Exemple: Norme associée à un produit scalaire $\to$ voir le cours sur les espaces euclidiens.

Remarque: On note souvent $\|x\|$ au lieu de $N(x)$.

Définition 429

La distance associée à une norme N est l'application :

$$d : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x, y) & \longmapsto & N(x - y) \end{array}$$

On vérifie aisément qu'une distance associée à une norme vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 430

1. $\forall x, y \in E, \quad d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$
2. $\forall (x, y, z) \in E^3, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$
3. $\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = d(y, x).$

Ceci nous permet de définir les ensembles particuliers suivants :

Définition 431

Soit $x \in E$, et $r \in \mathbb{R}^+$.
La boule ouverte de centre a de rayon r est notée $B_o(a, r)$, et est définie par :

$$B_o(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) < r\}.$$

La boule fermée de centre a de rayon r est notée $B_f(a, r)$, et est définie par :

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) \leq r\}.$$

La sphère de centre a de rayon r est notée $S(a, r)$, et est définie par :

$$S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}.$$

15.2 Premières utilisations

La définition de suite convergente dans un espace vectoriel utilise les normes.

Définition 432

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite convergente si et seulement si elle vérifie :

$$\exists l \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad \|u_n - l\| \leq \varepsilon.$$

l s'appelle la limite de la suite. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Remarque: Dans la définition, on peut remplacer le $\leq$ par $<$.

Proposition 433

La définition de suite convergente peut aussi s'écrire en terme de boules.

$$\exists l \in E, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_n \in B(l, \varepsilon).$$

Remarque: Dans la proposition précédente, les boules peuvent être aussi bien ouvertes que fermées.

Proposition 434

Lorsqu'une suite est convergente, la limite est unique, on la note $\lim u_n$.

Proposition 435

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes. On suppose que la première suite converge vers u et la seconde converge vers v.
La suite $(u_n + \lambda v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $u + \lambda v$.

Remarque: On ne peut ecrire $\lim(u_n + \lambda v_n) = \lim u_n + \lambda \lim v_n$ que lorsqu'au moins 2 des limites existent et en l'ayant justifié **avant**.

Corollaire 436

L'ensemble des suites réelles (ou complexes) convergentes est un sous-espaces vectoriel des suites réelles (ou complexes).

Voyons maintenant une utilisation de la norme pour la classification des fonctions.

Définition 437

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit k un réel positif. Soit f une application de E dans F. On dit que f est $k-$lipschitzienne lorsque :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Remarque: une fonction $0-$lipscitzienne est constante.

Exemple: $f : x \mapsto x^2$ est-elle lipschitzienne ? sin est-elle lipschitzienne ?

Proposition 438

L'application $x \mapsto N(x)$ est 1-lipschitzienne de (E, N) dans $(\mathbb{R}, |.|)$

Remarque: les fonctions $k-$lipschitzienne constituent une classe importante qui possède de nombreuses applications. (cf equadiff, inversion locale, point fixe)

Exemple: $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ avec $k < 1$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition 439

Soit E, F et G trois espaces vectoriels et k, k' des réels positifs. Soit $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ des applications respectivement k et k'-lipschtizienne. Alors, $g \circ f$ est $k'k$-lipschitzienne.

15.3 Comparaison des normes

Proposition 440

Soit E un espace vectoriel, et N et N' deux normes sur E. On a équivalence entre :
- Toute suite convergente de limite 0 pour la norme N converge de limite 0 pour N'.
- Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $N' \leq \alpha N$.

Exercice: Comparer les normes N_1, N_2 et N_∞ de $\mathbb{K}^n$.

Remarque: On a aussi $N' \leq \alpha N \Leftrightarrow \big(\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}, \quad (u_n \to_N l) \Rightarrow (u_n \to_{N'} l)\big)$

Définition 441

Sur un espace vectoriel E, deux normes N et N' sont dites équivalentes s'il existe des réels α et β strictement positifs, tels que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

Remarque: l'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

Proposition 442

Si N et N' sont équivalentes, alors elles définissent les mêmes suites convergentes.

Théorème 443

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Remarque: Autrement dit, dans un espace vectoriel de dimension finie, il n'existe qu'une seule manière de décire la convergence avec des normes.

15.4 Etude des suites en dimension finie

Définition 444

Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite bornée, s'il existe un réel M tel que, pour tout x dans A, $\|x\| \leq M$.
Soit X un ensemble quelconque. Une application $f : X \longrightarrow E$ est dite bornée lorsque $f(X)$ est une partie bornée de E.

Remarque: En dimension finie, les parties bornées pour une norme le sont pour toutes les normes. On a indépendance de la notion par rapport aux normes.

Remarque: Pour une application bornée f, on peut définir sa norme infinie : $N_\infty(f) = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$. L'ensemble des applications bornées de A dans F, noté $\mathcal{B}(A, F)$ muni de N_∞ est un espace vectoriel normé.

Théorème 445

Pour qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel E de dimension finie soit convergente, il faut et il suffit que ses coordonnées dans une base de E soient convergentes.
Dans ce cas, les limites des coordonnées sont les coordonnées de la limite.

Souvent, il est impossible de démontrer la convergence, car on est pas capable de calculer la limite. On a donc besoin d'une définition de la convergence indépendante de la limite.

Définition 446

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé E est dite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq q \geq N, \quad \|u_p - u_q\| \leq \varepsilon.$$

Remarque: Toute suite convergente est de Cauchy.

Théorème 447

Toute suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est convergente.

Corollaire 448

Toute suite de Cauchy d'un espace vectoriel de dimension finie est convergente.

Exemple: $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est de Cauchy donc converge.

15.4.1 Comparaison des suites

Définition 449

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace vectoriel de dimension finie E. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles. On dit que :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :
$$\forall \varepsilon > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n > N,\quad \|u_n\| \leq \varepsilon\ \alpha_n.$$
On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$.
2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si :
$$\exists A > 0,\quad \exists N \in \mathbb{N},\quad \forall n > N,\quad \|u_n\| \leq A\ \alpha_n.$$
On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(\alpha_n)$.

Exemple: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définit par $u_n = (ln(n)/n, 1/n^2)$, et $\alpha_n = 1/\sqrt{n}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et négligeable devant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 450

Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas, et si :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\|u_n\|}{\alpha_n} = 0,$$
alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas, et si :
$$\left(\frac{\|u_n\|}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$
alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominé par $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 451

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs réelles ou complexes.
On dit que ces deux suites sont équivalentes lorsque $\alpha_n - \beta_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\alpha_n)$.
On note alors $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$.

Proposition 452

$\sim$ est une relation d'équivalence.

Proposition 453

Si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et si :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 1,$$
alors $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \beta_n$.

Exemple: $\frac{1}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

15.5 Topologie

Soit $(E, \|\|)$ un espace vectoriel normé. On va définir des parties particulières qui seront importantes pour la suite.

Définition 454

1. Une partie Ω de E est dite ouverte (ou est un ouvert) si et seulement si :

$$\forall x \in \Omega, \quad \exists \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \subset \Omega.$$

2. Une partie F de E est dite fermée (ou est un fermé) si et seulement si son complémentaire est ouvert.

Exercice: Les boules ouvertes sont ouvertes et les boules fermées sont fermées.

Remarque: Une partie fermée "contient l'intégralité de son bord". Une partie ouverte "ne contient aucun des points de son bord".

Remarque: Il existe des parties ni ouvertes, ni fermées.

Exemple: $[0; 1]$ est fermé, $]0; 1[$ est ouvert, $[0; 1[$ n'est ni l'un ni l'autre.

Proposition 455

Soient F_1 et F_2 des parties fermées de E. Soient Ω_1 et Ω_2 des parties ouvertes de E. On a les propriétés suivantes :

1. $\Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2$ sont des ouverts.
2. $F_1 \cup F_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont des fermés.

Remarque: Attention : une intersection infinie d'ouverts n'est pas forcément ouverte. De même une union infinie de fermé n'est pas forcément fermée.

Définition 456

Soit A une partie de E, et soit $x \in A$.

1. On dit que x est un point intérieur à A si :

$$\exists \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \subset A.$$

2. On dit que x est un point adhérent à A si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Remarque: Un point intérieur est adhérent.

Proposition 457

Un point x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui converge vers x.

Proposition 458

Une partie F de E est fermée si et seulement si elle contient tous ses points adhérents.

Corollaire 459

Une partie F de E est fermée si et seulement si toute suite convergente de F converge dans F.

Chapitre 16

Etude locale d'une application

Objectifs :

1. *Avoir compris et savoir utiliser les notions de limite et de continuité.*
2. *Savoir calculer une limite et étudier la continuité d'une fonction.*
3. *Savoir comparer des fonctions.*
4. *Savoir étudier la continuité d'une application linéaire, savoir calculer sa norme subordonnée.*
5. *Savoir montrer la compacité d'une partie d'un espace vectoriel, savoir utiliser la compacité.*

16.1 Limites des applications

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies. On notera $\|\cdot\|$ la norme sur chacun de ces espaces.

Définition 460

Soit $f : A \subset E \to F$ une application et a un point adhérent à A. Soit $b \in F$, on dit que f admet b pour limite en a si :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in A, \qquad & \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - b\| \leq \varepsilon. \\ \Leftrightarrow \quad & (x \in B(a, \delta) \Rightarrow f(x) \in B(b, \varepsilon)) \\ \Leftrightarrow \quad & f\left(B(a, \delta)\right) \subset B(b, \varepsilon) \end{aligned}$$

Lorsque $a \in A$, on dit que f est continue en a, et dans ce cas $b = f(a)$.
Si ce n'est pas le cas, on peut prolonger f par continuité en posant $f(a) = b$. Réciproquement, si l'on peut prolonger f par continuité en a alors f possède une limite en a.

Définition 461

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on dit que la limite de f en $+\infty$ est l si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \geq A, \quad \|f(x) - l\| \leq \varepsilon.$$

Remarque: On définit de manière analogue la limite en $-\infty$.

Définition 462

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on dit que la limite de f en a point adhérent à A est $+\infty$ si :

$$\forall A > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \|x - a\| \leq \eta, \quad f(x) \geq A.$$

Remarque: On définit de manière analogue le fait que f tend vers $-\infty$.

Proposition 463

La limite lorsqu'elle existe est unique. On note alors $\lim_{x \to a} f(x)$ la limite en a de f.

Proposition 464 (Composition des limites)

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés. Soit A une partie de E, soit $f : A \to F$, Soit B une partie de F tel que $f(A) \subset B$, soit $g : B \to G$. On peut définir l'application composée $g \circ f$.
Supposons que :
- f admet une limite en un point a adhérent à A.
- $\lim_a f = b$.
- g admet une limite c en b.

Alors :
$g \circ f$ admet une limite en a et cette limite vaut c.

Remarque: Par continuité de f, b est adhérent à $f(A)$.

Exemple: $x \mapsto e^{\sin x}$ est continue.

Corollaire 465

La composée de deux fonctions continues est continue.

Proposition 466

Pour qu'une fonction $f : A \to F$, où F est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, admette une limite en a adhérent à A, il faut et il suffit que les applications coordonnées $e_i^* \circ f$ admettent une limite en a adhérent à A.
Dans ce cas, les limites des coordonnées sont les coordonnées de la limite.

Exemple: $f : x \mapsto \left(ln|1+x|, \sqrt{1+x^2}\right)$ est continue sur $]-1; +\infty[$.

Proposition 467

Soit f et g deux fonctions d'une partie A d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F. Soit λ une fonction de A dans $\mathbb{K}$. Soit a un point adhérent à A.
Supposons que $\lim_{x \to a} f$, $\lim_{x \to a} g$ et $\lim_{x \to a} \lambda$ existent et valent respectivement, l_f, l_g et l_λ. On a :

1. $\lim_{x \to a} f + g$ existe et vaut $l_f + l_g$.
2. $\lim_{x \to a} \lambda \cdot f$ existe et vaut $l_\lambda \cdot l_f$.

On va maintenant voir une autre méthode pour caractériser les limites.

Proposition 468

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. Soit $f : A \to F$, soit a un point adhérent à A. $\lim_a f$ existe si et seulement si $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A qui converge vers a (qui existe par définition d'un point adhérent).

16.2 Continuité des applications

16.2.1 Premiers résultats

Le paragraphe précédent nous a fournit déjà plusieurs résultats :

Proposition 469

La somme, le produit externe, la composition d'applications continues est continues.

Proposition 470

Si l'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le produit de deux fonctions continues est continues.

Proposition 471

Les applications continues $\mathcal{C}(E, F)$ forment un espace vectoriel, sous-espace vectoriel des applications de E dans F.
Les applications continues $\mathcal{C}(E, \mathbb{K})$ forment une algèbre, sous-algèbre des applications de E dans $\mathbb{K}$.

Proposition 472

Une application à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$ est continue si et seulement si ses applications coordonnées sont continues.

Proposition 473

Une application f est continue en un point a si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$, si et seulement si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a, $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge

Proposition 474

Si $f : A \subset E \to F$ est continue, alors sa restriction $f|_B : B \subset A \to F$ est aussi continue.

16.2.2 Caractérisation topologique

Proposition 475

Soit E et F des espaces vectoriels normés.
Si une application $f : E \to F$ est continue, alors l'image réciproque de tout ouvert est ouverte.
Si une application $f : E \to F$ est continue, alors l'image réciproque de tout fermé est fermée.

Remarque: (La réciproque est vraie et hors programme).

Corollaire 476

En particulier, si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\{x \in E \mid f(x) > \lambda\}$ est ouvert.
2. $\{x \in E \mid f(x) \geq \lambda\}$ est fermé.
3. $\{x \in E \mid f(x) = \lambda\}$ est fermé.

Remarque: Cette propriété sert surtout à démontrer qu'une partie est ouverte ou fermé.

Exemple: Soit E un espace vectoriel de dimension finie. $\det : \mathcal{L}(E) \to \mathbb{K}$ est une application continue (on verra la raison plus tard), donc :
$\{u \in \mathcal{L}(E) \mid det(u) = 0\}$ est un fermé.
Donc la limite d'application non-injective est non-injective. Limite pour quelle norme ? ?

16.2.3 Relations de comparaison

Définition 477

Soit f une application d'un espace vectoriel normé E dans un espace vectoriel normé F, soit $a \in E$ et φ une application de E dans $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas sur $E \setminus a$.

– On dit que f est dominée par φ en a, ce qu'on note $f = O(\varphi)$ si :

$$\exists M > 0, \quad \exists \lambda > 0, \forall x \in B(x, M), \quad \|f(x)\| \leq \lambda\varphi(x).$$

– On dit que f est négligeable devant φ en a, ce qu'on note $f = o(\varphi)$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists M > 0, \quad \forall x \in B(x, M), \quad \|f(x)\| \leq \varepsilon\varphi(x).$$

Exemple: $x^2 =_0 o(x)$ et $\dfrac{x^3}{1+x} =_{+\infty} O(x^2)$.

16.3 Continuité des applications linéaires

Dans ce paragraphe, on utilisera les espaces vectoriels normés de dimension finie (E, N), (F, N'), (G, N''). Tout ce qui va être fait est FAUX en dimension infinie.

Théorème 478

Soit u une application linéaire de E dans F. Il existe un nombre réel k tel que u est k-lipschitzienne, autrement dit :

$$\forall x \in E, \quad N'(u(x)) \leq kN(x).$$

u est donc continue.

Définition 479

On peut donc définir pour un endomorphisme u :

$$\|u\| = \sup_{N(x) \leq 1} N'(u(x)).$$

C'est une norme, qu'on appelle norme subordonnée à N et N'.

Remarque: On a aussi $\|u\| = \sup\limits_{N(x)=1} N'(u(x))$.

Théorème 480

$(\mathcal{L}(E, F), \|.\|)$ est un espace vectoriel normé.

Proposition 481

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, soit $x \in E$, on a :

$$N'(u(x)) \leq \|u\|N(x).$$

Le cas où $E = F$, nous amène à étudier le comportement de la norme par rapport à la composition.

Théorème 482

Soit $u \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \in \mathcal{L}(E, F)$. On a :

$$\|u \circ v\| \leq \|u\|\|v\|.$$

Définition 483

On dit que $(\mathcal{L}(E), \|.\|)$ est une algèbre normée.

Théorème 484

Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad N''(B(x, y)) \leq kN(x)N'(y).$$

B est donc continue.

Application: Continuité des produits internes, externes, et scalaires.

Application: Continuité du déterminant.

16.4 Compacité

Définition 485

Une partie K non-vide d'un espace vectoriel de dimension finie est dite compacte si elle est fermée et bornée.

Remarque: On dira parfois un compact plutôt qu'une partie compacte.

Exemple: les intervalles de la forme $[a; b]$, avec $a < b$ sont des parties compactes de $\mathbb{R}$.

Proposition 486

L'image d'un compact par une application continue est un compact.

Corollaire 487

Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ continue sur un compact K admet des extremums et les atteint.

Lemme 488

Un compact de $\mathbb{R}$ contient ses bornes.

Chapitre 17

Dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions considérées seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

17.1 Dérivée en un point

Définition 489

Soit f une application de I dans E, et soit $a \in I$, on dit que :

- f est dérivable à droite en a si et seulement si :

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a,\ x > a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

  $f'_d(a)$ s'appelle alors la dérivée à droite de f en a.

- f est dérivable à gauche en a si et seulement si :

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a,\ x < a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

  $f'_g(a)$ s'appelle alors la dérivée à gauche de f en a.

- f est dérivable en a si et seulement si :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ existe.}$$

  $f'(a)$ s'appelle alors la dérivée à droite de f en a.

Proposition 490

Une fonction est dérivable en $a \in I$ si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en a et si $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Remarque: On peut représenter une telle fonction par une courbe dans l'espace vectoriel E, la dérivée en a donne alors un vecteur tangent à cette courbe en $f(a)$.
On peut voir une telle fonction comme une trajectoire d'un point matériel dans l'espace vectoriel E, la dérivée en a est alors le vecteur vitesse du point matériel à l'instant $t = a$.

Définition 491

Lorsqu'une fonction est dérivable en a, on note :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

On note aussi $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$ les dérivées à gauche et à droite lorsqu'elles existent.

Proposition 492

f est dérivable en a si et seulement si il existe $l \in E$ tel qu'au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) + (x - a)l + o(x - a).$$

Et dans ce cas, $f'(a) = l$.

Exemple: Soit $f : x \mapsto \ln(1 + x)$, on sait que $f'(0) = 1$. Alors $\ln(1 + x) =_{x \to 0} x + o(x)$.

Corollaire 493

Si f est dérivable (resp. à gauche, à droite) en a, elle est continue (resp. à gauche, à droite) en a.

Définition 494

Une fonction $f : I \to E$ est dite dérivable lorsqu'elle est dérivable en tout point de I (éventuellement dérivable à droite, si la borne supérieur de I est dans I et à gauche si la borne inférieur de I est dans I). On note alors :

$$Df : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Il arrive qu'on note f' ou bien $\dfrac{df}{dx}$ cette application.

Proposition 495

Soit $a \in I$. Soient f et g deux applications dérivables en a. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $f + \lambda g$ est dérivable en a et :

$$(f + \lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a).$$

Si f et g sont dérivables, alors :

$$D(f + \lambda g) = D(f) + \lambda D(g).$$

Proposition 496

Soit f une application dérivable et soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u(f)$ est dérivable, et :

$$D(u(f)) = u(D(f)).$$

Proposition 497

Soient f et g deux applications dérivables et soit B une application bilinéaire de $E \times E$ dans F, $B(f, g)$ est dérivable et :

$$D(B(f, g)) = B(D(f), g) + B(f, D(g)).$$

Remarque: On retrouve là la formule de dérivation d'un produit.

Application: Si E est un espace préhilbertien et si f et g sont dérivables alors $(f|g)$ est dérivable, et :

$$D(f|g) = (Df|g) + (f|Dg).$$

En particulier,

$$D\|f\|_2 = (Df|f) + (f|Df).$$

Si la norme de f est une constante et si l'espace préhibertien est réel, alors f et Df sont orthogonaux.

Proposition 498

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E (de dimension finie), alors f est dérivable si et seulement si chacune des $e_i^* \circ f$ est dérivable.
Les coordonnées de la dérivée sont alors la dérivée des coordonnées.

Corollaire 499

Une application de I dans $\mathbb{C}$ est dérivable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ le sont si et seulement si $\overline{f}$ l'est. On a alors :

$$D(f) = D(\Re(f)) + iD(\Im(f)) \text{ et } D(\overline{f}) = \overline{D(f)}.$$

Proposition 500

Soit f une application continue sur $I = (a; b)$ et dérivable sur $I =]a; b[$, alors : f est constante si et seulement si Df est la fonction nulle.

Exemple: $x \mapsto \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$

17.2 Applications de classe C^k

Définition 501

Une application f de I dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1 si elle est dérivable et si l'application Df est continue.

Proposition 502

L'ensemble des applications de classe C^1 de I dans E, que l'on note $C^1(I, E)$, est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I dans E.

Définition 503

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La dérivée k^{ieme} d'une application (si elle est existe), est notée $D^{(k)}f$, et est définie par :

$$D^{(k)}f = D(D^{(k-1)}f) \text{ et } D^{(0)}f = f.$$

On note parfois la dérivée k^{ieme} $f^{(k)}$ ou bien $\dfrac{d^k f}{dx^k}$. Lorsque $D^{(k)}f$ existe, on dit que f est dérivable k fois.
Une application f, k fois dérivable et dont la dérivée k^{ieme} est continue est dite de classe C^k.

Remarque: Avec cette définition, les fonctions de classe C^0 sont les fonctions continues.

Définition 504

Une application f est dite de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Proposition 505

L'ensemble des applications de classe C^k de I dans E, que l'on note $C^k(I, E)$, est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I dans E.
L'ensemble des applications de classe C^∞ de I dans E, que l'on note $C^\infty(I, E)$, est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de I dans E.

Proposition 506

Si f est de classe C^k, alors Df est de classe C^{k-1}.

Proposition 507

Si $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors on dispose dans l'espace $C^k(I, E)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ d'un produit interne définit par :

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Avec ce produit interne, $C^k(I, E)$ possède une structure de $\mathbb{K}-$algèbre, sous-algèbre des fonctions de I dans E. Et on a :

$$D^{(k)}(fg) = \sum_{n=0}^{k} C_k^n D^{(n)} f D^{(k-n)} g.$$

(Formule de Leibniz)

Proposition 508

Si $\varphi : J \to I$ est de classe C^k et $f : I \to E$ est de classe C^k, alors la composée $f \circ \varphi$ est classe C^k.

Définition 509

Pour $k \geq 1$, une fonction f de I dans $J \subset \mathbb{R}$ est un C^k-difffémorphisme si f est bijective et que f et f^{-1} sont de classe C^k.

Théorème 510

Une fonction φ de classe C^k sur un intervalle J est un C^k-difféomorphisme de J sur $I = \varphi(J)$ si et seulement si, pour tout élément t de J, $\varphi'(t) \neq 0$.

Remarque: Ce théorème est très pratique car, s'il est relativement simple de montrer qu'une fonction est de classe C^k et que sa dérivée ne s'annule pas, il est souvent impossible de calculer explicitement f^{-1} et ainsi de montrer que f^{-1} est de classe C^k.

17.3 Applications de classe C^k par morceaux

Définition 511

Une application f à valeurs dans E est dote C^k par morceaux sur un segment $[a; b]$, où $1 \leq k \leq +\infty$, s'il existe une subdivision $(a_0, \ldots, a_n)$ de $[a; b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i; a_{i+1}[$ soit prolongeable à une fonction de classe C^k sur $[a_i; a_{i+1}]$, autrement dit s'il existe $g \in C^k([a_i; a_{i+1}])$ tel que $g|_{]a_i;a_{i+1}[} = f|_{]a_i;a_{i+1}[}$

Définition 512

Une fonction f est dite de classe C^k par morceaux sur un intervalle quelconque I si sa restriction à tout segment de I est de classe C^k par morceaux.

Exemple:

1. $f : x \mapsto |\sin(x)|$ est de classe C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$ n'est pas C^0 par morceaux.

Définition 513

Soit f une application de classe C^k par morceaux sur $[a;b]$, et $(a_0,\ldots,a_n)$ la subdivision subordonnée à f. On définit les dérivées succesives de f par :

$$D^j f : \begin{array}{ccc} [a;b]\setminus\{a_0,\ldots,a_n\} & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & D^j f(x), \end{array}$$

pour $j \leq k$.

Proposition 514

Si f est continue sur I et de classe C^1 par morceaux sur I, f est constante si et seulement si $Df = 0$.

Chapitre 18

Intégration sur un segment des fonctions à valeurs vectorielles

Objectifs :

1. *Connaître et avoir compris la construction de l'intégrale.*
2. *Connaître les propriétés de l'intégrale (linéarité, positivité, relation de Chasles).*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions considérées seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Tous les $\mathbb{K}-$espaces vectoriels considérés seront de dimension finie.

18.1 Définitions et premières propriétés

18.1.1 Cas des fonctions en escaliers

Définition 515

Soit φ une fonction en escalier d'un segment $J = [a; b]$ dans E. Soit $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ une subdivision subordonnée à φ ($a_0 = a$ et $a_n = b$). On définie l'intégrale de φ sur J par :

$$\int_J \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\varphi\left(\frac{a_{i+1} + a_i}{2}\right).$$

Cette intégrale peut aussi être noté $\displaystyle\int_{[a;b]} \varphi$ ou bien $\displaystyle\int_a^b \varphi$ ($b \geq a$).

Définition 516

On appelle indicatrice d'un segment $[a; b]$ qu'on note $\chi_{[a;b]}$ la fonction en escalier définie par :

$$\chi_{[a;b]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [a; b] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque: Si $[a; b] \subset [c; d]$, alors $\displaystyle\int_c^d \chi_{[a;b]} = b - a$.

Proposition 517 (linéarité de l'intégrale)

Si φ et ψ sont des applications en escalier sur un segment J et à valeurs dans E, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\int_J \varphi + \lambda\psi = \int_J \varphi + \lambda \int_J \psi.$$

Proposition 518

Si φ est une application en escalier sur un segment J et à valeurs dans E, et si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

$$\int_J f(\varphi) = f\left(\int_J \varphi\right).$$

Proposition 519

Si φ est une application en escalier sur un segment J et à valeurs dans E, et si $\|.\|$ est une norme sur E, alors :

$$\left\|\int_J \varphi\right\| \leq \int_J \|\varphi\|$$

18.1.2 Cas des fonctions continues par morceaux

Définition 520

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment J et à valeurs dans E. Il existe donc une suite d'applications en escaliers $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f. On définit l'intégrale de f sur J par :

$$\int_J f = \lim_{n\to+\infty} \int_J \varphi_n.$$

Proposition 521 (linéarité de l'intégrale)

Si f et g sont des applications continues par morceaux sur un segment J et à valeurs dans E, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\int_J f + \lambda g = \int_J f + \lambda \int_J g.$$

Proposition 522

Si f est une application continue par morceaux sur un segment J et à valeurs dans E, et si $\Psi \in \mathcal{L}(E, F)$, alors :

$$\int_J \Psi(f) = \Psi\left(\int_J f\right).$$

Corollaire 523

Si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, et si f est une application continue par morceaux telle que $f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i$, alors :

$$\int_J f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_J f_i\right) e_i.$$

Corollaire 524

Si f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors :

$$\begin{aligned}
\int_J \Re(f) &= \Re\left(\int_J f\right) \\
\int_J \Im(f) &= \Im\left(\int_J f\right) \\
\int_J \overline{f} &= \overline{\left(\int_J f\right)}
\end{aligned}$$

Proposition 525

Si f est une application continue par morceaux sur un segment J et à valeurs dans E, et si $\|.\|$ est une norme sur E, alors :

$$\left\|\int_J f\right\| \leq \int_J \|f\|$$

18.2 Positivité de l'intégrale

Proposition 526

Soit f une application continue par morceaux sur un segment J, à valeurs réelles positives, alors $\displaystyle\int_J f \geq 0$.

Corollaire 527

Si f et g sont des applications continues par morceaux sur un segment J à valeurs réelles telle que $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_J f \leq \int_J g$.

Corollaire 528

Si f est une application continue à valeurs positives, alors :

$$\int_J f = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$

Remarque: Ceci s'utilise aussi sous forme contraposée :
S'il existe $x \in J$ tel que $f(x) > 0$, et si f est continue sur J et à valeurs positives sur J, alors l'intégrale de f sur J est strictement positive.

18.3 Prolongement de l'intégrale

Proposition 529

Les intégrales de deux fonctions continues par morceaux coïncidant sauf sur une partie finie de J sont égales.

Ce qui rend cohérente la définition suivante.

Définition 530

Soit f définie sur un segment $[a;b]$ privé d'une subdivision $S = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a;b]$, telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i; a_{i+1}[$ soit prolongeable par continuité sur $[a_i; a_{i+1}]$ en une fonction continue par morceaux $\tilde{f}_i$. Alors on définit :

$$\int_{[a;b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i;a_{i+1}]} \tilde{f}_i.$$

18.4 Modification de l'intervalle d'intégration, relation de Chasles

Proposition 531

Si K est un segment contenu dans J et f une application continue par morceaux sur J, $\displaystyle\int_K f = \int_J \chi_K f$.

Corollaire 532

Soit $a < c < b$ des réels et f une application continue par morceaux sur $[a;b]$, alors

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f.$$

Définition 533

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[c;d]$ et $a, b \in [c;d]$, on définit :

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \displaystyle\int_{[a;b]} f(t)dt, & \text{si } a < b \\ \displaystyle -\int_{[b;a]} f(t)dt, & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après ce qui précède, on a la relation suivante,

Corollaire 534 (Relation de Chasles)

Soit a, b, c des réels de J et f une application continue par morceaux sur J, alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

18.5 Majoration d'intégrales

Proposition 535 (Inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$, alors on a les inégalités suivantes :

$$\left\| \int_{[a;b]} f \right\| \leq \int_{[a;b]} \|f\| \leq (b-a) \sup_{[a;b]} \|f\|.$$

Proposition 536

Si f et g sont des fonctions continues par morceaux sur J et si f est à valeurs réelles positives, alors :

$$\left\| \int_J fg \right\| \leq \int_J \|fg\| \leq \sup_J \|g\| \int_J f.$$

Remarque: Les mêmes relations sont valables pour l'intégrale $\displaystyle\int_a^b$, mais il faut faire attention aux signes.

Exemple: $\displaystyle\int_0^a \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \leq (\arctan a)^2$.

Chapitre 19

Dérivation et intégration, Formules de Taylor

Objectifs :

1. *Savoir calculer intégrales et primitives.*
2. *Connaître et savoir utiliser l'inégalité des accroissements finis, ainsi que les formules de Taylor.*

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions considérées seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

19.1 Primitives et intégrale d'une fonction continue

Définition 537

Soit f une application continue de I dans E. Une primitive de f est une application de classe C^1 telle que pour tout $x \in I$, $g'(x) = f(x)$.
On peut étendre cette définition aux applications continues par morceaux :
Si f est une application continue par morceaux de I dans E. Une primitive de f est une application continue de classe C^1 par morceaux telle que pour tout $x \in I$, si f est continue en x, alors g est dérivable en x et $g'(x) = f(x)$.

Proposition 538

Deux primitives d'une même application diffèrent d'une constante.

Théorème 539 (Théorème fondamental)

Soient f une application continue de I dans un espace vectoriel E et $a \in I$, alors :

– L'application $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a, et pour toute primitive h de f sur I :

$$\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a).$$

– Pour toute application de classe C^1 sur I,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

Remarque: Ce théorème peut être étendu de la manière suivante :

Théorème 540

Soient f une application continue par morceaux de I dans un espace vectoriel E et $a \in I$, alors :
L'application $x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a, et pour toute primitive h de f sur I :

$$\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a).$$

Théorème 541

Soient f une application continue de I dans un espace vectoriel E et de classe C^1 par morceaux, et $a \in I$, alors :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x D(f)(t)dt.$$

Proposition 542 (Intégration par parties)

Soit f et g deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Remarque: En utilisant l'extension du théorème fondamental, on peut généraliser ce théorème de la manière suivante.

Proposition 543 (Intégration par parties)

Soit f et g deux fonctions continues et de classe C^1 par morceaux sur un intervalle $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)D(g)(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b D(f)(x)g(x)dx.$$

Exercice: Intégrale de Wallis.

Proposition 544 (Changement de variable)

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ et à valeurs dans un espace vectoriel E et φ une fonction de classe C^1 sur $[\alpha;\beta]$ à valeurs dans $[a;b]$, on a alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

On peut étendre ce théorème aux fonctions continues par morceaux.

Proposition 545

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a;b]$ et à valeurs dans un espace vectoriel E et φ une fonction de classe C^1 sur $[\alpha;\beta]$ à valeurs dans $[a;b]$ et **strictement monotone**, on a alors :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Exemple: Calculer $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$.

19.2 Etude globale des fonctions de classe C^1

Théorème 546 (Inégalités des accroissements finis)

Soit f une application continue sur $[a;b]$ avec $b \geq a$ et de classe C^1 sur $]a;b[$. Si pour tout élément t de $]a;b[$, $\|f'(t)\| \leq \lambda$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda(b-a)$$

Remarque: Ce théorème est l'écriture mathématique de l'assertion suivante. Si pendant n heures on se déplace au plus à v km/h, alors on se déplacera d'au plus nv kilomètres.

Ce théorème peut se généraliser au fonctions C^1 par morceaux.

Théorème 547 (Inégalités des accroissements finis)

Soit f une application continue sur $[a;b]$ avec $b \geq a$ et de classe C^1 par morceaux sur $]a;b[$. Si pour tout élément t de $]a;b[$ où $f'(t)$ est défini, $\|f'(t)\| \leq \lambda$, alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \lambda(b-a)$$

Voyons maintenant un autre résultat important pour les fonctions de classe C^1.

Théorème 548 (Prolongement)

Soit f une application continue sur $[a;b]$ et de classe C^1 sur $]a;b]$. Si f' admet une limite finie en a, alors f est de classe C^1 sur $[a;b]$.

Corollaire 549

Si f est continue sur $[a;b]$, et de classe C^k sur $]a;b]$, et si pour tout $r \in [\![1;k]\!]$, $D^r f$ admet une limite finie en a, alors f est de classe C^k sur $[a;b]$.

19.3 Formules de Taylor

Théorème 550 (Formule de Taylor avec reste intégrale)

Soit f de classe C^k sur un intervalle I et de classe C^{k+1} par morceaux sur I. Soient $a \in I$, et h tel que $a+h \in I$, on a alors :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{h^k}{k!}f^{(k)}(a) + \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)dt.$$

Définition 551

Cette décomposition s'écrit sous la forme :

$$f(a+h) = Pk(h) + R_k(h),$$

où P_k est un polynôme de degré k. R_k s'appelle le reste intégral d'ordre k.

Théorème 552 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Dans les conditions du théorème précédent, on a :

$$\|R_k(t)\| \leq \frac{|h|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{t\in[a;a+h]} \|f^{(k+1)}(t)\|$$

Théorème 553 (Taylor-Young)

Soit f une application de classe C^k de I, il existe des vecteurs $a_0, \ldots, a_k$ de E tels que au voisinage de $a \in I$:

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_k h^k + o(h^k).$$

Définition 554

Soit f une application continue sur I, s'il existe des vecteurs $a_0, \ldots, a_k$ de E tels que au voisinage de $a \in I$:

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_k h^k + o(h^k).$$

Alors on dit que f admet un dévelloppement limité ou DL à l'ordre k en a.

Remarque: Si une fonction admet un DL à l'ordre k, elle n'est pas forcément de classe C^k : $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Théorème 555 (Primitivation d'un DL)

Si f est une fonction continue qui admet un dévelloppement limité à l'ordre k en a,

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_k h^k + o(h^k).$$

alors une primitive F de f possède un développement limité à l'ordre $k+1$ en a qui est :

$$F(a+h) = F(a) + a_0 h + a_1 \frac{h^2}{2} + \ldots + a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + o(h^{k+1}).$$

Théorème 556 (Dérivation d'un DL)

Si f est un fonction de classe C^1 telle que sa dérivée Df admette un dévelloppement limité à l'ordre k en a,

$$Df(a+h) = a_0 + a_1 h + \ldots + a_k h^k + o(h^k).$$

alors f possède un développement limité à l'ordre $k+1$ en a qui est :

$$f(a+h) = f(a) + a_0 h + a_1 \frac{h^2}{2} + \ldots + a_k \frac{h^{k+1}}{k+1} + o(h^{k+1}).$$

Chapitre 20

Fonctions de plusieurs variables

Objectifs :

1. *Savoir calculer et utiliser la différentielle d'une fonction.*
2. *Savoir étudier une courbe ou une surface paramétrée ou définie de manière implicite.*
3. *Savoir étudier les coniques et les quadriques.*
4. *Savoir calculer une intégrale multiple, une intégrale curviligne.*
5. *Avoir compris la notion de forme différentielle.*

20.1 Calcul différentiel

20.1.1 Définitions et premières propriétés

Dans toute la suite, f est une fonction de U dans F, où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie et U est un ouvert de E.

Définition 557

f est différentiable en $a \in U$ si et seulement s'il existe une application linéaire $df(a) \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) - f(a) - df(a)(h) \underset{h \to 0}{=} o(h).$$

$df(a)$ est appelée différentielle de f en a (ou bien application linéaire tangente).

Remarque: On note parfois df_a au lieu de $df(a)$.
Remarque: Si f est différentiable en a, il est clair que f est continue en a.
Remarque: f est différentiable en a signifie que f peut être "bien" approchée au voisinage de a par une application affine :

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} f(a) + df(a)(h) + o(h).$$

Proposition 558

Si f est différentiable en a, la différentielle en a est unique.

Proposition 559

Si f et g sont différentiables en a, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $f + \lambda g$ est différentiable en a et

$$d(f + \lambda g)(a) = df(a) + \lambda dg(a).$$

Définition 560

Si pour tout $a \in U$, f est différentiable en a, alors on dit que f est différentiable sur U et la différentielle de f est l'application

$$\begin{array}{rcl} df : U & \to & \mathcal{L}(E,F) \\ a & \mapsto & df(a). \end{array}$$

Exemple: Si $u \in \mathcal{L}(E,F)$, alors pour tout $a \in E$, u est différentiable en a et $du(a) = u$.
Si $f : \mathbb{R} \to F$, alors pour tout $a \in E$, si f est dérivable en a, alors f est différentiable en a et $df(a)(h) = h \cdot f'(a)$.

Exercice: Justifier les deux exemples précédents.

Définition 561

Soit $a \in U$ et $h \in E$. Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in]-\delta;\delta[$, $a + th \in U$. On peut alors définir :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_h : &]-\delta;\delta[& \longrightarrow & U \\ & t & \longmapsto & f(a+th) \end{array}$$

Si φ_h est dérivable à l'origine, alors on dit que f est dérivable selon le vecteur h, et la dérivée de f en a selon un vecteur h est

$$D_h f(a) = \varphi'(0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ a+th \in U}} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \in F.$$

Exemple: Si $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, est différentiable en $a = (x_0, y_0)$, et si l'on trace la surface de $\mathbb{R}^3$ définie par $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in U \text{ et } f(x,y) = z\}$, la dérivée de f en a selon le vecteur u est la pente de la tangente de la courbe définie par $S \cap P$, où P est le plan affine $(x_0, y_0, 0) + Vect(u, e_z)$. (Faire un dessin).

Proposition 562

Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur h et

$$D_h f(a) = \overbrace{\underbrace{df(a)}_{\in \mathcal{L}(E,F)} \underbrace{(h)}_{\in E}}^{\in F}.$$

Définition 563

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors pour tout i, si elle existe, $D_{e_i} f(a)$ est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \in F$ ou bien $D_i f(a)$.
On note $D_i f : a \mapsto D_i f(a)$.

Remarque: Les $D_i f$ se calculent comme des dérivées "classiques" en dérivant par rapport à x_i et en considérant les autres variables comme des constantes.

Proposition 564

Si f est différentiable en a, alors

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i^*.$$

On note alors :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

avec $dx_i : U \longrightarrow E^*$ une application constante telle que $dx_i(a) = e_i^*$.

Remarque: On a donc

$$df(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)dx_i(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)e_i^*.$$

Il arrive qu'on note abusivement dx_i pour l'application constante égale à e_i^*.

Définition 565

On dit que f est de classe C^1 (ou continûment différentiable) lorsque pour tout i, $D_i f$ est définie et continue sur U.

Théorème 566

Si les dérivées partielles $D_i f$ sont continues sur U, alors f est différentiable en tout point a de U.

Remarque: La différentielle est alors continue.

Proposition 567

Si f et g sont de classe C^1 sur U, à valeurs dans F. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ $f + \lambda g$ est de classe C^1 sur U et

$$d(f + \lambda g) = df + \lambda dg.$$

Exemple: $f : (x, y) \mapsto cos(x^2 + xy)$.

20.1.2 Composition

Proposition 568

Si $f : U \to F$ et $g : V \to G$ sont de classe C^1 et $f(U) \subset V$. Avec U ouvert de E et V ouvert de F. Alors $g \circ f$ est de classe C^1 et

$$\forall a \in U, \quad \forall h \in E, \quad d(g \circ f)(a)(h) = dg(f(a))(df(a)(h)) = (dg(f(a)) \circ df(a))\,(h).$$

Autrement dit :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

Remarque: Si f et g sont des fonctions réelles de la variable réelle, on retrouve $(f \circ g)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a)$.

Corollaire 569

Si $u \in \mathcal{L}(F, G)$, alors

$$d(u \circ f)(a)(h) = u(df(a)(h)).$$

Corollaire 570

Si $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de F, on a

$$d(u_i^* \circ f)(a)(h) = u_i^*(df(a)(h)).$$

Autrement dit, si f_i est la i^{eme} application coordonnée de f, $df_i(a)(h)$ est la i^{eme} coordonnée de $df(a)(h)$. Donc les df_i sont les coordonnées de df.
En particulier, les $D_j f_i$ sont les coordonnées de $D_j f$.

Corollaire 571

Si $\varphi : I \to U$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$:

$$h(f \circ \varphi)'(a) = d(f \circ \varphi)(a)(h) = df(\varphi(a))(h\varphi'(a)) = hdf(\varphi(a))(\varphi'(a)).$$

Exemple: Calculer la différentielle de $f : (x,y) \mapsto \cos(x)\mathrm{sh}(y)$.
En déduire la dérivée de $g : x \mapsto \cos(\arctan(x))\mathrm{sh}(\arctan(x))$

C^1−Difféomorphismes

Définition 572

$f : U \to V$ est un C^1−difféomorphisme si et seulement si f est bijective, et f et f^{-1} sont de classe C^1. (V est un ouvert de F).

Remarque: Un difféomorphisme est nécessairement définie d'un ouvert sur un ouvert.

Proposition 573

Soit f un C^1−difféomorphisme de U sur V, alors, pour tout $a \in U$, $df(a)$ est inversible et pour tout $b \in V$, et tout $h \in F$, :

$$d(f^{-1})(b)(h) = \left[df(f^{-1}(b))\right]^{-1}(h).$$

Remarque: Pour un difféomorphisme, on a nécessairement $\dim E = \dim F$.

Définition 574

Si $f : U \to F$ est de classe C^1, et si on dispose d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et d'une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de F, on note

$$J_a f = (D_j f_i(a))_{(i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!]} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \text{ et } jac_a f = \det(J_a f).$$

$J_a f$ est en fait la matrice de $df(a)$ donnée dans les bases de E et F.

Remarque: On a donc $J_a(f \circ g) = J_{f(a)} g J_a f$ (si on dispose de bases de E, F et G).

Théorème 575

Si $f : U \to F$ est de classe C^1 et injective, et si pour tout $a \in U$, $jac_a f \neq 0$, alors f est un C^1−difféomorphisme de U sur $f(U)$.

Remarque: Naturellement, si f est de U dans V, il faut démontrer que f est surjective.

Exercice: Montrer que l'application $f : (x,y) \mapsto (xy, x^2 - y^2)$ est un C^1−difféomorphisme de $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+$ sur son image.

Application: Soit f un C^1−difféomorphisme. Soit Γ un arc paramétré régulier d'ordre 1, et $a \in \Gamma$, donner un vecteur directeur de la tangente en $f(a)$ à $f(\Gamma)$.

20.1.3 Fonctions à valeurs numériques

Proposition 576

On note $C^1(U)$ l'ensemble des applications de U dans $\mathbb{K}$. $C^1(U)$ est une algèbre.

Définition 577

Soit $f \in C^1(U)$. Si E est un espace euclidien, pour tout $a \in U$, il existe un unique vecteur $v \in E$ telle que

$$\forall h \in E, \quad df(a)(h) = (v|h).$$

(cf le cours sur les espaces euclidiens). v est appellé le gradient de f en a et noté $\overrightarrow{grad} f(a)$.

Proposition 578

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, alors

$$\overrightarrow{grad} f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) e_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) e_n.$$

Remarque: Le gradient est la direction de "croissance maximale" de la fonction.

Exemple: Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, calculer le gradient de f. Tracer sur un dessin les courbes définies par $f(x, y) = cste$. Tracer le gradient en chaque point de coordonnée entière.

Application: Calcul du minimum par la méthode du gradient.

Théorème 579 (Accroissements finis)

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ dans $C^1(U)$. On suppose que U est convexe (pour tout $a, b \in U$, $[a; b] \subset U$). S'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $a \in U$

$$\|df(a)\| \leq M,$$

alors pour tout a, b dans U, $|f(a) - f(b)| \leq M\|b - a\|$.

Corollaire 580

Si $f : U \to \mathbb{R}$ dans $C^1(U)$ vérifie $df = 0$, alors f est constante. La réciproque est vraie et évidente.

Définition 581

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$ et si $df(a) = 0$, alors on dit que a est un point critique pour f.

20.1.4 Dérivée d'ordre k

On est toujours dans le cas des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soit $f : U \to \mathbb{K}$, U ouvert de E, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \to \mathbb{K}$, on peut donc se poser la question de sa différentiabilité.

Définition 582 (Récursive)

- f est de classe C^k si toutes les dérivées partielles d'ordre $k-1$, avec $k \geq 2$. sont de classe C^1.
- Les dérivées partielles d'ordre k sont les $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ où g parcourt les dérivées partielles d'ordre $k-1$, avec $k \geq 2$.
- Les dérivées partielles d'ordre 1 sont $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.

Exemple: $f : (x, y) \mapsto x \; arctan(xy)$. Calculer toutes les dérivées à l'ordre 2.

Proposition 583

Les fonctions de classe C^k sur U, notée $C^k(U)$ constituent une $\mathbb{K}-$algèbre.

Proposition 584

Les opérateurs $Dj : f \mapsto D_j f$ de $C^k(U)$ dans $C^{k-1}(U)$ sont des applications linéaires.

Théorème 585 (Schwarz)

Si $f : U \to F$ est de classe C^2 sur U, alors pour tout i, j, $D_i(D_j f) = D_j(D_i f)$. Autrement dit :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Exemple: Donner un contre exemple.

Définition 586

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, on dit que :
- f possède un maximum (resp. minimum) local en a, si il existe ε tel que $B(a, \varepsilon) \subset U$ et tel que pour tout $x \in B(a, \varepsilon)$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) \geq f(a)$).
- f possède un maximum (resp. minimum) global en a, si pour tout $x \in U$, $f(x) \leq f(a)$(resp. $f(x) \geq f(a)$).

On dit que l'extremum est strict si la seule valeur de x pour laquelle $f(x) = f(a)$ est a.

Remarque: Un maximum global est nécessairement un maximum local.

Proposition 587

Si f admet un extremum local en $a \in U$ et si f est différentiable en a, alors $df(a) = 0$.

Application: Calcul des extremums d'une fonction de plusieurs variables.

20.1.5 Etude des courbes et surfaces

Les coordonnées polaires

Définition 588

Le repère polaire $(\vec{u}, \vec{v})$ du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est défini pour tout nombre réel θ par :

$$\begin{aligned} \vec{u}(\theta) &= \cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2 \\ \vec{v}(\theta) &= -\sin\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_2 \end{aligned}$$

où $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 589

$\dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}$ et $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}$.

Définition 590

Soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il existe un unique $\theta \in [-\pi; \pi[$ et un unique $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $M = O + \rho\vec{u}(\theta)$.
Le couple (ρ, θ) sont les coordonnées polaires du point M. On a alors clairement :

$$x = \rho\cos\theta \text{ et } y = \rho\sin\theta.$$

Théorème 591

La fonction $P :]0; +\infty[\times] - \pi; \pi[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $P(\rho, \theta) = \rho e^{i\theta}$ est un C^1-difféomorphisme sur son image.

Définition 592

Pour un nombre complexe z appartenant à l'image de P, la détermination principale de l'argument de z est $p_2(P^{-1}(z))$, où $p_2 : (r, \theta) \mapsto \theta$. Si $z \in \mathbb{R}^*_-$, la détermination principale de l'argument de z est π.

Remarque: Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$, on définit la fonction $F : (r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a, en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, $F = f \circ P$, soit en dérivant :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial F}{\partial r} & = & \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\theta \\ \dfrac{\partial F}{\partial \theta} & = & -\dfrac{\partial f}{\partial x}r\sin\theta + \dfrac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta \end{array}\right.$$

En résolvant ce système, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \cos\theta\dfrac{\partial F}{\partial r} - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \sin\theta\dfrac{\partial F}{\partial r} + \dfrac{\cos\theta}{r}\dfrac{\partial F}{\partial \theta} \end{array}\right.$$

Courbes définies implicitement

Définition 593

Si F est une application de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, la courbe définie implicitement par F est

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in U \mid F(x, y) = 0\}.$$

Remarque: Une courbe définie implicitement est une "ligne de niveau" et toute "ligne de niveau" peut être vue comme une courbe définie implicitement.

Remarque: $i(\mathcal{C}) = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \cap \{(x, y, F(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, avec $i : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \to \mathbb{R}^2$ tel que $i(x, y, 0) = (x, y)$

Définition 594

Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie précédemment. Un point $M = (x, y)$ de cette courbe est dit singulier si $dF(x, y) = 0$. Un point qui n'est pas singulier est dit régulier.

Remarque: En un point singulier, il arrive que la courbe possède un point double ou que ce point soit isolé, ou encore autre chose. Ce point peut aussi avoir une "allure ordinaire". En un point régulier, l'allure de la courbe est toujours "ordinaire".

Théorème 595 (Théorème des fonctions implicites)

Soit F l'application définie précédement, et soit $(u_0, v_0) \in U$ telle que $F(u_0, v_0) = 0$. Si $\dfrac{\partial F}{\partial y}(u_0, v_0) \neq 0$, alors, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi :]u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que :

$$\forall t \in]u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon[, \quad (t, \varphi(t)) \in U \text{ et } F(t, \varphi(t)) = 0,$$

et $\varphi(u_0) = v_0$.

Corollaire 596

Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ un point régulier, alors $\mathcal{C}$ possède une tangente en (u_0, v_0) d'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}(u_0, v_0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(u_0, v_0)y = \frac{\partial F}{\partial x}(u_0, v_0)u_0 + \frac{\partial F}{\partial y}(u_0, v_0)v_0.$$

Remarque: La normale à la courbe en (u_0, v_0) s'en déduit alors simplement, c'est la droite :

$$(u_0, v_0) + vect(\overrightarrow{grad} f(u_0, v_0)).$$

Exercice: Soit $\mathcal{C}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec a et b non nuls. Trouver en tout point $M = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$ l'équation de la tangente en M passant par $\mathcal{C}$.

Surfaces paramétrées

Définition 597

Soit $f : U \to \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La surface paramétrée définie par f est

$$\mathcal{S} = \{f(x, y) \mid (x, y) \in U\}.$$

Un point régulier d'une telle surface est un point $M = f(x, y)$ tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$.

Proposition 598

Soit $\mathcal{S}$ une surface paramétrée par la fonction f. Pour tout point $M = f(u_0, v_0)$ régulier de la surface $\mathcal{S}$, il existe un plan tangent en M à $\mathcal{S}$ définie par :

$$f(u_0, v_0) + Im(df(u_0, v_0)).$$

Remarque: La normale à la surface s'en déduit alors simplement, c'est la droite :

$$f(u_0, v_0) + vect\left(\frac{\partial f}{\partial x}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial f}{\partial y}(u_0, v_0)\right).$$

Exercice: Soit $\mathcal{S}$ la surface paramétrée par $f : (x, y) \mapsto (x, y, x^2 - 3y^2 + 3xy - 3)$. Donner une base du plan tangent à $\mathcal{S}$ en $f(1, 1)$, puis en donner une équation cartésienne.

Surfaces définies implicitement

Définition 599

Si F est une application de classe C^1 d'un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, la surface définie implicitement par F est

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

Définition 600

Soit $\mathcal{S}$ la surface définie précédemment. Un point $M = (x, y, z)$ de cette surface est dit singulier si $dF(x, y, z) = 0$. Un point qui n'est pas singulier est dit régulier.

Théorème 601 (Théorème des fonctions implicites)

Soit F est l'application définie précédement, et soit $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ telle que $F(u_0, v_0, w_0) = 0$. Si $\frac{\partial F}{\partial z}(u_0, v_0, w_0) \neq 0$, alors, il existe $\varepsilon > 0$ et $\varphi :]u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon[\times]v_0 - \varepsilon; v_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que :

$$\forall (t_1, t_2) \in]u_0 - \varepsilon; u_0 + \varepsilon[\times]v_0 - \varepsilon; v_0 + \varepsilon[, \quad F(t_1, t_2, \varphi(t_1, t_2)) = 0,$$

et $\varphi(u_0, v_0) = w_0$.

Proposition 602

Soit $\mathcal{S}$ une surface définie implicitement par la fonction F. Pour tout (u_0, v_0, w_0) telle que $dF(u_0, v_0, w_0) \neq 0$, $\mathcal{S}$ possède un plan tangent définie :

$$(u_0, v_0, w_0) + Ker(dF(u_0, v_0, w_0)),$$

ou bien sous forme cartésienne :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(u_0, v_0, w_0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(u_0, v_0, w_0)y + \frac{\partial F}{\partial z}(u_0, v_0, w_0)z = \frac{\partial F}{\partial x}(u_0, v_0, w_0)u_0 + \frac{\partial F}{\partial y}(u_0, v_0, w_0)v_0 + \frac{\partial F}{\partial z}(u_0, v_0, w_0)w_0.$$

Remarque: La normale à la surface en (u_0, v_0, w_0) s'en déduit alors simplement, c'est la droite :

$$(u_0, v_0, w_0) + vect(\overrightarrow{grad} f(u_0, v_0, w_0)).$$

Courbes de l'espace définies comme une intersection de deux surfaces

Proposition 603

Soit $\mathcal{C}$ une courbe de l'espace définie comme intersection de deux surfaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Soit $(u_0, v_0, w_0) \in \mathcal{C}$, si les deux surfaces $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ admettent en (u_0, v_0, w_0) des plans tangents T_1 et T_2 distincts, alors $\mathcal{C}$ admet en (u_0, v_0, w_0) une tangente qui est $T_1 \cap T_2$.

20.1.6 Applications aux coniques et aux quadriques

Définition 604

Une conique est une courbe du plan, définie implicitement par :

$$\mathcal{C} = \{O + x\vec{i} + y\vec{j} \mid ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0\},$$

où $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée du plan et a, b, c, d, e, f sont des réels.

Définition 605

On dit que l'équation de la conique est réduite dans le repère $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ si dans ce repère :

$$\mathcal{C} = \{M = O' + x\vec{i}' + y\vec{j}' \mid Ax^2 + By^2 + C = 0\},$$

ou bien

$$\mathcal{C} = \{M = O' + x\vec{i}' + y\vec{j}' \mid Ax^2 + By = 0\},$$

où A, B, C sont des réels.

Pratique de la réduction de l'équation

Dans un premier temps, on écrit l'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ sous forme matricielle. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}$$

L'équation devient alors ${}^tXAX + LX + f = 0$. On calcule le rang de A. Si A est de rang 2, on procède de la manière suivante :

1. On résout le système $2AX + {}^tL = 0$. On note $X_0 = {}^t(x_0 \;\; y_0)$ la solution de ce système.

2. On effectue le changement de variable : $x' = x + x_0$ et $y' = y + y_0$. Autrement dit $X' = X + X_0$, ce qui donne en remplaçant dans l'équation (il faut bien remarquer que A est symétrique) :
$$\begin{aligned} &{}^t(X' - X_0)A(X' - X_0) + L(X' - X_0) + f \\ &= {}^tX'AX' - 2{}^tX_0AX' + {}^tX_0AX_0 + L(X' - X_0) + f \\ &= {}^tX'AX' + LX' - LX' + {}^tX_0AX_0 - LX_0 + f \\ &= {}^tX'AX' + {}^tX_0AX_0 - LX_0 + f \end{aligned}$$
On note alors $C = {}^tX_0AX_0 - LX_0 + f$. Dans le repère $(X', \vec{i}, \vec{j})$, l'équation de la conique est ${}^tX'AX' + C = 0$.
3. Diagonaliser la matrice A dans une base orthonormale. On a $A = {}^tPDP$, on pose $X'' = PX'$, l'équation de la conique devient alors, si $X'' = (x'', y'')$ et $D = diag(A, B)$:
$$Ax''^2 + By''^2 + C = 0$$

Si A est de rang 1, on procède uniquement à la diagonalisation.

Classification des coniques

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipse.
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ hyperbole.
$y = ax^2$ parabole.

Quadriques : Réduction et classification

On procède de même qu'avec les coniques. On a la classification suivante :

- **Quadriques de rang 3**
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoïde.
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ hyperboloïde à une nappe.
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ hyperboloïde à deux nappes.
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ cône.
- **Quadriques de rang 2**
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cylindre elliptique.
  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ cylindre hyperbolique.
  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$ paraboloïde hyperbolique.
  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$ paraboloïde elliptique.
- **Quadriques de rang 1**
  $y = ax^2$ cylindre parabolique.

20.2 Calcul intégrale

20.2.1 Intégrale double

Définition 606

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application continue. Soient a, b, c, d des réels tels que $K = [a; b] \times [c; d] \subset U$, par définition l'intégrale de f sur K est définie par :
$$\int\int_{[a;b]\times[c;d]} f(x, y)dx\ dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dx\right] dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dy\right] dx$$

Exemple: Calculer $\displaystyle\int\int_{[0;1]\times[0;1]} xy\ dx\ dy$.

Définition 607

Un compact élémentaire de U est une partie A tel qu'il existe des réels a, b, c, d et des fonctions continues u, v, r, s telles que

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b \text{ et } u(x)\leq y\leq v(x)\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c\leq y\leq d \text{ et } r(y)\leq x\leq s(y)\}. \end{aligned}$$

Proposition 608

Si A est un compact élémentaire (vérifiant les conditions précédentes), alors

$$\int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{r(y)}^{s(y)} f(x,y)dx\right] dy.$$

La valeur commune des ces deux intégrales est appelée l'intégrale de f sur A et est notée $\displaystyle\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$.

Définition 609

Si f est la fonction constante égale à 1, $\displaystyle\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$ est appelée l'aire de A, et notée $\mathcal{A}(A)$.

Exemple: Soit Δ la partie du plan délimitée par les deux paraboles $y = x^2$ et $x = y^2$. Calculer l'aire de Δ. Calculer $\displaystyle\int\int_\Delta xy\ dx\ dy$.

Proposition 610

Si A est un compact élémentaire de $\mathbb{R}^2$, alors l'application

$$f \mapsto \int\int_A f(x,y)\ dx\ dy$$

est une forme linéaire sur $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$.

Proposition 611

Soient f et g dans $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$, alors on a :

1. Si $f\geq 0$, alors $\displaystyle\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy \geq 0$.
2. Si $f\geq g$, alors $\displaystyle\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy \geq \int\int_A g(x,y)\ dx\ dy$.
3. $\displaystyle\left|\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy\right| \leq \int\int_A |f(x,y)|\ dx\ dy \leq \mathcal{A}(A)\sup_A |f(x,y)|$.

Corollaire 612

Si A est d'aire nulle, $\displaystyle\int\int_A f(x,y)\ dx\ dy = 0$.

Définition 613

Un compact K est dit quarrable si et seulement si il existe des compacts élementaires $E_1, \ldots, E_n$, tel que $K = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ et pour tout $i \neq j$, $E_i \cap E_j$ est d'aire nulle.
On pose alors :

$$\int\int_K f(x,y)\ dx\ dy = \sum_{i=1}^{n} \int\int_{E_i} f(x,y)\ dx\ dy.$$

Remarque: Toutes les propriétés précédentes s'étendent aux compacts quarrables.

Proposition 614

Soit φ un C^1 de U dans V. Soit $A \subset U$ un compact quarrable tel que $B = \varphi(A)$ soit encore quarrable. On suppose de plus que l'ensemble des points de B qui ont plusieurs antécédents est d'aire nulle, alors pour f dans $\mathcal{C}(B, \mathbb{R})$

$$\int\int_B f(x,y)\ dx\ dy = \int\int_A f(\varphi(u,v))\ |jac_{u,v}(\varphi)|\ du\ dv.$$

Application: Passage en coordonnées polaires.
Soit $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$, alors $|jac_{r,\theta}(\varphi)| = r$

Exemple: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dx\ dy$.

20.2.2 Intégrale curviligne

Définition 615

Une forme différentielle de degré 1 et de classe C^k sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ est une application $\omega : U \to (\mathbb{R}^p)^*$ de classe C^k.

Remarque: Si ω est une forme différentielle, on peut lui associer un unique champ de vecteurs de la manière suivante :
Comme $\omega(x) \in (\mathbb{R}^p)^*$, il existe un unique $a_x \in \mathbb{R}^p$ telle que $\omega(x) = (a_x|.)$ (où $(.|.)$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^p$). L'application $x \mapsto a_x$ est un champ de vecteurs, c'est le champ de vecteurs associé (de manière unique) à la forme différentielle.

Définition 616

Si $(e_1^*, \ldots, e_p^*)$ désigne la base canonique de $(\mathbb{R}^p)^*$, la forme différentielle constamment égale à e_i^* est notée dx_i.

Proposition 617

Pour tout $x \in U$, il existe des $P_i(x)$ (définis de manière unique), tel que

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x) e_i^*.$$

Autrement dit,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i.$$

ω est de classe C^k si et seulement si tout les P_i sont de classe C^k.

Remarque: Le champ de vecteur associé à $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ est $\sum_{i=1}^{n} P_i e_i$.

Proposition 618

L'ensemble $\Omega^k(U)$ des formes différentielles de classe C^k sur U est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Définition 619

Une forme différentielle ω est dite exacte sur U si il existe une application $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^{k-1} dont la différentielle est ω. Autrement dit $df = \omega$. ω est alors une forme différentielle de classe C^k.
On dit que l'application f est une primitive de ω sur U.

Remarque: Si ω est exacte et que f est une primitive de ω, alors si v est le champ de vecteurs associé à ω, alors $v = \overrightarrow{grad} f$.

Définition 620

Une forme différentielle de classe C^k sur U, $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ est dite fermée si et seulement si :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!], \quad \frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}.$$

Proposition 621

Si ω est une forme différentielle exacte, alors elle est fermée.

Définition 622

Un ouvert U est dit étoilé, si il existe un point a de U tel que pour tout $x \in U$, $[a; x] \subset U$.

Théorème 623 (Poincaré)

Soit ω une forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert U étoilé. Alors, ω est exacte si et seulement si ω est fermé.

Définition 624

Soit ω une forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert U, et Γ un arc orienté de U, alors on appelle intégrale curviligne de ω sur Γ l'intégrale

$$\int_\Gamma \omega = \int_a^b \omega(\varphi(t))(\varphi'(t))dt,$$

où $\varphi : [a; b] \to U$ est un paramétrage de Γ, continu et C^1 par morceaux.
De plus, la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la paramétrisation choisie.

Remarque: Attention, l'arc est orienté. Si on change l'orientation, on change le signe de l'intégrale :

$$\int_\Gamma \omega = -\int_{\Gamma'} \omega,$$

où Γ' est l'arc Γ parcouru à l'envers.

Exemple: Montrer que si Γ est une courbe fermée, $\int_\Gamma \omega$ ne dépend pas de l'origine du paramétrage.

Théorème 625

Soit ω une forme différentielle exacte sur un ouvert U, et soit f une primitive de ω. Pour tout arc orienté Γ inclus dans U d'origine A et d'extremité B,

$$\int_\Gamma \omega = f(B) - f(A).$$

En particulier, si Γ est une courbe fermée, $\displaystyle\int_\Gamma \omega = 0$.

Exercice: Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \omega$, avec $\omega = y^2dx + x^2dy$, et Γ défini implicitement par l'équation $x^2 + y^2 - ay = 0$.