

Colle 10

Exercice 1:

On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est muni canoniquement de trois normes définies, pour tout $u = (x_1, \dots, x_n)$, respectivement par : $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ et $\|u\|_\infty = \max\{|x_i| \mid 1 \leq i \leq n\}$.

a) Vérifier que, pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a : $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq n\|u\|_\infty$ et $\|u\|_2 \leq \sqrt{n}\|u\|_\infty$.

b) Représenter sur un même schéma les boules ouvertes de $\mathbb{R}^2$, de centre O et de rayons 1 et 2, correspondant à chacune de ces trois normes.

Exercice 2:

Pour tout $f \in E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, on pose : $\|f\|_{[0,1]} = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$ et $N(f) = \|f\|_{[0,1]} + \|f''\|_{[0,1]}$.

Montrer que N est une norme sur E.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f_n(t) = t^n$; calculer $\|f_n\|_{[0,1]}$ et $N(f_n)$.

La norme N est-elle équivalente à $\|\cdot\|_{[0,1]}$?

Exercice 3:

Pour tout $f \in E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, on pose : $N(f) = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}$, $N'(f) = |f(0)| + N(f')$ et $N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + N(f'')$.

a) Montrer que N, N' et N'' sont des normes sur E.

b) Montrer que : $\forall f \in E \quad N(f) \leq N'(f) \leq N''(f)$ [indication : utiliser le théorème des accroissements finis].

c) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f_n(t) = \sin(nt)$; calculer $N(f_n)$, $N'(f_n)$ et $N''(f_n)$. Les normes N, N' et N'' sont-elles deux à deux équivalentes ?

Exercice 4:

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que, pour toutes parties A et B de E, on a :

a) $\overset{\circ}{A} \subset A$; b) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$; c) $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$; d) $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{A \cup B}$.

Trouver deux parties A et B de $\mathbb{R}$ telles que : $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \neq \overset{\circ}{A \cup B}$.

AKMANSOUR Abdelmajid

def fonction p linéaire alternée et antisymétrique + lien (non su)

(E1) il ne sait pas le refaire.

Exercice 2 il sait à peine démontrer que N est une norme.

Note 09/20 Ensemble faible.

DANTEUILLE Thomas

Def d'une norme (Correct)

(E2) (Correct)

Exercice 3 Ne démontre pas ce qu'il faut démontrer.

Note 11/20 Ensemble moyen.