

Exercice 4.12. Pour tout $f \in E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$, on pose :

$$N(f) = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0,1]\}, \quad N'(f) = |f(0)| + N(f') \quad \text{et} \quad N''(f) = |f(0)| + |f'(0)| + N(f'').$$

Rappel (théorème des accroissements finis) :

Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

1. Montrer que N , N' et N'' sont des normes sur E .
2. Montrer que : $\forall f \in E \quad N(f) \leq N'(f) \leq N''(f)$ [indication : utiliser le théorème des accroissements finis].
3. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f_n(t) = \sin(nt)$.
 - a. Calculer $N(f_n)$, $N'(f_n)$ et $N''(f_n)$.
 - b. Les normes N , N' et N'' sont-elles deux à deux équivalentes ?

Exercice 1 :

Soit $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + n^2 x^2}$, définie sur $\mathbb{R}$.
 Etudier la CVS et la CVU.

Exercice 2 :

Soit $E = \{f \text{ intégrable sur } [0,1]\}$, montrer que N_1 n'est pas une norme.

Exercice 3 :

Soit $f_n(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^n}$, définie sur $\mathbb{R}$.
 Etudier la CS et la CVU.

Exercice 4 :

Soit $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ pour $x \in [0, n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.
 Montrer que (f_n) CVU vers $x \mapsto e^{-x}$.

SLIVSEK Maxence

Donner N_1, N_2 et N_∞ sur $\mathbb{R}^n$. (Il ne connaît pas les normes)

(E1) Démontrer que ce sont des normes.

Montrer que $N_\infty \leq N_2 \leq N_1 \leq nN_\infty$ (il a beaucoup de mal)

Exercice 1. (Assez bien)

Note 09/20 Ensemble moyen.

SLIVSEK Guillaume

Donner N_1, N_2 et N_∞ sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. (Il ne connaît pas N_2)

(E4) 1)

Exercices 2 et 3 (Des erreurs de calculs, dérivation!)

Note 10/20 Ensemble moyen.

Vansuyt Romain

Définition d'une norme.

(E5) TB

Ex 4.12 (TB pour le TAF)

Note 18/20 TB.

LANGLET Edouard

Définition distance

(E4) (TB)

Exercice 4 (Bien pour la difficulté de l'exercice)

Note 17/20 TB.