

Exercice 1 :

On considère la série réelle $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

Justifier sa convergence. On désigne alors par S sa somme, et par S_n sa somme partielle d'ordre n .

Montrer que : $S_{n-1} = \int_0^1 \frac{1 - (-1)^n t^{4n}}{1+t^4} dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que : $S = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^4}$.

Exercice 2 :

On considère la série de terme général : $u_n = \arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Etant donné $a \in \mathbb{R}_+$, vérifier que la fonction $g : x \mapsto \arctan \left(\frac{a-x}{1+ax} \right)$ est constante sur $[0; +\infty[$.
3. En déduire la valeur de la somme de la série $\sum u_n$.

Exercice 3 :

Etant donné $A \in \mathbb{R}_+^*$, on pose, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \frac{1}{1+A} \cdot \frac{1}{1+\frac{A}{2}} \cdots \frac{1}{1+\frac{A}{n}}$.

1. Montrer que si $A \leq 1$, la série $\sum u_n$ diverge. On suppose désormais que : $A > 1$.
2. On pose, pour tout $n \geq 1$: $u'_n = n^A u_n$, $w_n = \ln(u'_n)$ et $v_n = w_{n+1} - w_n$.
 - (a) Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
 - (b) Montrer alors que la suite (u'_n) converge et a pour limite un réel strictement positif.
 - (c) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 4 :

Soit F la fonction déterminée par : $F(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos wt \, dt$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est solution d'une équation différentielle que l'on intégrera.

Calculer $F(w)$, sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction déterminée par : $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-xt^3}}$.

1. Quel est domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $] -\infty, 1[$, continue sur $] -\infty, 1]$.

Exercice 6 :

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par $f(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+tx} e^{-t^2} dt$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Etudier la continuité et la dérivabilité de f .
3. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $f(x) \sim \sqrt{x} \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-t^2} dt$