

Exercice 1 :

Calculez, si elles existent, les inverses des matrices suivantes :

$$1. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad 2. \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad 3. \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n + 1$ et $\mathbb{K}[X].P = \{Q.P, Q \in \mathbb{K}[X]\}$ l'ensemble des multiples de P .

Montrer que $\mathbb{K}[X].P$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$, puis que $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X].P \oplus \mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 3 :

Montrer que dans le $\mathbb{R}$ -e.v des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les familles de fonctions suivantes sont des familles libres :

1. $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto e^{\lambda x}$.
2. $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ où $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto \cos(\lambda x)$.
3. $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ où $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ x \mapsto |x - \lambda|$.

Exercice 4 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v (où $\mathbb{K}$ est de caractéristique différente de 2), et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que si $p + q$ est un projecteur,
 $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$

Exercice 5 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence

$$(E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f) \iff (\text{Im } f = \text{Im } f^2).$$

Cette équivalence reste-t-elle vraie en dimension infinie ?

Exercice 6 :

Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v de dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $B = (f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^n(x_0))$ forme une base de E .

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer qu'il existe $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{Id}_E = 0$ (sans utiliser, bien sûr, le théorème de Cayley-Hamilton).

OKAT Alicia

Cours : Caractérisation des isomorphismes en dim finie (TB)

(E2) $\sum \frac{1}{n \ln^2(n)}$ Nature, mauvais démarrage mais après une petite aide ça s'est bien passé.

Ex 5 TB malgré la difficulté, mais elle n'a dit à la fin qu'en fait il a été fait en cours.

Note : 15/20

LEMAIRE Bastien

Cours : Dem de $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$, il ne connaît pas la démo.

(E7) $x \mapsto e^{rx}$, $r \in \mathbb{R}$ est libre. Il ne sait pas refaire cet exercice.

$\sum (e - (1 + \frac{1}{n})^n)$ nature (j'ai donné cet exercice vu le niveau proposé) l'étude a été assez bien faite.

Note : 08/20

CHAFIQ Yassine

Cours : $F \oplus G$ direct $\Leftrightarrow F \cap G = \{0\}$, dem : il ne connaît pas la démonstration.

Ex 4 : Ne sait pas le faire et il a du mal à démontrer une équivalence (quoi supposer, quoi démontrer ...)

Note : 06/20