# COLLE N$^0$ 5

## Exercice 1 :

Caluler :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{1-x+x^2}dx$
2. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

## Exercice 2 :

Montrer que dans le $\mathbb{R}$-e.v des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les familles de fonctions suivantes sont des familles libres :

1. $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ où $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto e^{\lambda x}$.
2. $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}^+}$ où $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto \cos(\lambda x)$.
3. $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ où $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto |x-\lambda|$.

## Exercice 3 :

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v (où $\mathbb{K}$est de caractéristique différente de 2), et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que si $p+q$ est un projecteur,
   $Im(p+q) = Im\, p \oplus Im\, q$ et $Ker(p+q) = Ker\, p \cap Ker\, q$

## Exercice 4 :

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer l'équivalence

$$(E = Im\, f \oplus Ker\, f) \Longleftrightarrow (Im\, f = Im\, f^2).$$

Cette équivalence reste-t-elle vraie en dimension infinie ?

## Exercice 5 :

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie $n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $B = (f(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^n(x_0))$ forme une base de $E$.

1. Montrer que $f$ est bijective.
2. Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdot + a_1 f + a_0 Id_E = 0$ (sans utiliser, bien sûr, le théorème de Cayley-Hamilton).

## Exercice 6 :

Soit $\Pi$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 3y + 5z = 0$ et soit $\Delta$ la droite d'équation $3x = 5y = 15z$.
Notons $u$ la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\Pi$ parallèlement à la droite $\Delta$.
Ecrire la matrice de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\Pi$ parallèlement à la droite $\Delta$.

## Exercice 7 :

Soit $\Pi$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + 2y - z = 0$ et soit $\Delta$ la droite d'équation $-x = y = -z$.
Notons $u$ la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\Pi$ parallèlement à la droite $\Delta$.
Ecrire la matrice de la projection de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\Pi$ parallèlement à la droite $\Delta$.

**BILOT Céline**

Cours : $F + G$ est direct ssi $F \cap G = \{0\}$ (TB)
(E2) (TB) Exercice 6. Elle a du mal à trouver une base du plan. Cependant, elle connait la méthode pour touver la matrice.

Note : 15/20

**FAYOLA Anaïs**

Cours : Définition de Dual. 5Ne connait pas la définition)

(E5) exercice 1 1. Des difficultés pour calculer cette intégrale.

Exercice 5.

Note : 08/20 Très insuffisant. Elle perd ses moyens à l'oral. Elle va devoir gérer son stress.

**MARCINIAK Axel**

Cours : $tr(AB) = tr(BA)$ dem : il ne connait pas la démonstration. Il se perd dans les indices.

(E6) Il ne sait pas refaire le calcul.

Exrrcice 7.

Note : 08/20 Très insuffisant.