Colle 8

64. Etudier la nature de la série de terme général :

$$a) u_n = \frac{1}{\ln(n)}; \quad b) u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin n^2}; \quad c) u_n = e^{-n^2}; \quad d) u_n = \frac{\sin n}{n^2}.$$

5. A toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, on associe l'application $g = T(f)$ définie par

$$g(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

Montrer que :

- a) $g(\mathbb{R}) \subset f(\mathbb{R})$;
- b) Si f est bornée, g est bornée également ;
- c) Si f est monotone, g est monotone ;
- d) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ell$;

Déterminer le noyau de l'application linéaire T .

6. Calcul de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Soit les deux fonctions f et g déterminées par $f(x) = \left[\int_0^x e^{-t^2} dt \right]^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

- a) Etudier leur dérivabilité, comparer les dérivées ; en déduire que pour tout réel x , $f(x) + g(x)$ est une constante que l'on précisera.
- b) Etudier l'existence et donner la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

8. Soit $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$. Montrer que :

- a) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$;
- b) Pour tout $x > 0$ $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$;
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x+1) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 1$.

d) Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow 0^+$.

e) Etudier le sens de variation de f et en déduire que $\forall x > 1$ $\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}$.

Donner un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

61. β étant un réel donné, montrer que la série de terme général : $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ ($n \geq 2$) converge si et seulement si $\beta > 1$ (on pourra considérer la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$).

63. Exemples de comparaison entre $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ et $[f(n)]$ lorsque f n'est pas décroissante :

a) Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 0; \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) = 1 \text{ et } f\left(n - \frac{1}{2n^2}\right) = f\left(n + \frac{1}{2n^2}\right) = 0; \\ f \text{ est affine par morceaux sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Vérifier que la série diverge et que l'intégrale converge.

b) Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad f(n) = 0 \text{ et } f\left(n - \frac{1}{2n}\right) = f\left(n + \frac{1}{2n}\right) = 1; \\ f \text{ est affine par morceaux sur } \mathbb{R}_+ \end{cases}$$

Vérifier que la série converge et que l'intégrale diverge.

BOUCHEZ David

Th continuité (TB)

(E4) (TB)

Exercice 6

Note 18/20 très bien.

TRAN Christian

Th de dérivabilité sous le signe int (Excellent)

(E6)

Exercice 8

Note 17/20 Très bonne prestation.