Matrices et opérations

I Matrices et opérations

I.1 definitions

Définition 1
Soient n et p deux entiers naturels non nuls.
Une matrice de format (n, p) est un tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes. Le nombre placé à l'intersection de la ième ligne et de la jème colonne est noté $a_{i,j}$ et s'appelle le coefficient d'indice $(i; j)$.

$$A = \begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p}
\end{pmatrix} & \leftarrow \textit{i-ème ligne} \\
\uparrow \\
\textit{j-ième colonne} &
\end{array}$$

Cas particuliers
• Si $n = 1$, A est une matrice ligne.
• Si $p = 1$, A est une matrice colonne.
• Si $n = p$, A est une matrice carrée d'ordre n.
• Si A est une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement sur la diagonale est une matrice diagonale.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

• Une matrice diagonale d'ordre n dont tous les coefficients de la diagonale sont égaux à 1 est la matrice identité, notée I_n.

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est une matrice nulle.

Propriété 1

*Deux matrices sont **égales** si, et seulement si, elles sont de même format (n, p) et si, pour tous entiers i et j, les coefficients d'indice (i, j) sont égaux.*

I.2 Somme et produit par un réel

Définition 2

Soient deux entiers naturels non nuls n et p.
On considère deux matrices A et B de même format (n, p) et un réel k.
• La somme des matrices A et B, notée $A + B$, est la matrice de format (n, p) dont le coefficient d'indice (i, j) est égal à $a_{i,j} + b_{i,j}$.
• Le produit de la matrice A par le réel k, notée kA, est la matrice de format (n, p) dont le coefficient d'indice (i, j) est égal à $k \times a_{i,j}$.

Scilab

```
-->A=[1 2 3; 5 0 1; 2 -9 3]
 A  =

    1.    2.    3.
    5.    0.    1.
    2.  - 9.    3.

-->2*A
 ans  =

    2.     4.     6.
    10.    0.     2.
    4.   - 18.    6.
```

```
-->B=eye(3,3)
 B  =

    1.    0.    0.
    0.    1.    0.
    0.    0.    1.

-->A+B
 ans  =

    2.    2.    3.
    5.    1.    1.
    2.  - 9.    4.
```

I.3 produit de deux matrices

Définition 3

Soient trois entiers naturels n, p et m non nuls.
On considère deux matrices A et B de format respectif (n, m) et (m, p).
Le produit de la matrice A par la matrice B, notée $A \times B$, est la matrice P de format (n, p) dont le coefficient d'indice (i, j) est égal à :

$$p_{i,j} = a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \cdots + a_{i,m} \times b_{m,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

Exemple

Produit de deux matrices sous scilab :

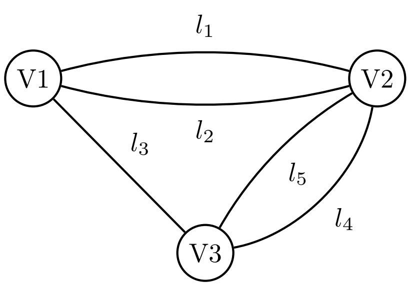
```
-->A=[3 -1; -2 4]
 A  =

    3.  - 1.
  - 2.    4.

-->B=[1 4; 3 -2]
 B  =

    1.    4.
    3.  - 2.
```

```
-->A*B
 ans  =

    0.      14.
    10.   - 16.

-->B*A
 ans  =

  - 5.      15.
    13.   - 11.
```

On remarque que le produit n'est pas commutatif.

Exemple

Nombre de trajets :



Une companie de bus propose différentes lignes reliant 3 villes.
On note A la matrice dont le coefficient $a_{i,j}$ est égal au nombre de lignes reliant la ville Vi à la ville Vj.

1. Déterminer A.
2. Déterminer A^2.
3. Combien de trajets utilisant deux lignes permettent d'aller de la ville $V1$ à la ville $V3$?

Propriété 2
On considère des matrices A, B, C dont les formats permettent les calculs indiqués. Alors :

1. ***proprieté de distributivité :*** $(A+B)\times C = A\times C + B\times C$.
   $A\times (B+C) = A\times B + A\times C$.
2. ***proprieté d'associativité :*** $(A\times B)\times C = A\times (B\times C)$.
3. *Pour tout réel k : $k\times (A\times B) = (k\times A)\times C$.*
4. *$A\times I_n = I_n\times A = A$, où I_n est la matrice identité d'ordre n.*

Exemple

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Ecrire A en fontion de I_3 et J.
2. Déterminer J^2 en fonction de J.
3. En déduire A^2.

II Les matrices carrées

II.1 Inverse d'un matrice carrée

Définition 4
Soit n un entier naturel non nul.
Une matrice carrée A d'ordre n est dite **inversible** *s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $A\times B = B\times A = I_n$.*
La matrice B est alors unique et s'appelle **inverse de A**. *On la note* $\mathbf{A^{-1}}$.

PREUVE :
On suppose que la matrice A d'ordre n est inversible.
Soient deux matrice B et C d'ordre n telle que :

$$A\times B = B\times A = A\times C = C\times A = I_n$$

Alors, $B = B\times (A\times C) = (B\times A)\times C = C$.
Les matrices sont donc égales. ■

Propriété 3
Soit un entier naturel n non nul.
Pour toutes les matrices A et B carrées d'ordre n,

1. *Si A est inversible, alors la matrice A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *Si A et B sont inversibles, alors la matrice $A\times B$ est inversible et $(A\times B)^{-1} = B^{-1}\times A^{-1}$.*

Propriété 4
Soient A, M et N trois matrices carrées de même ordre n.
Si A est inversible alors
1) $AM = O_n \Rightarrow M = 0_n$ 2) $AM = AN \Rightarrow M = N$

Exemple

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice inverse A à l'aide de la calculatrice. Vérifier le résultat.
2. Déterminer l'inverse de A à la main.

Exemple

Inverse grace à un polynôme.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que $A^2 - 3A + 2I = 0$.
2. En déduire que A est inversible.

Propriété 5

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

On note $det(A) = ad - bc$ (le déterminant de A).

1. *Si $det(A) \neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.*
2. *Si $det(A) = 0$ alors A n'est pas inversible*

II.2 Application aux systèmes linéaires

Définition 5

Un système linéaire à n équations, n inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est un système de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{cases} \quad \text{où les } a_{i,j} \text{ sont des réels.}$$

Résoudre le système, c'est trouver les n-uplets $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ qui vérifient toutes les équations.

Si on note les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Le sytème est équivalent à $AX = B$.

Propriété 6

Si la matrice A est inversible, le système admet une unique solution :
$X = A^{-1}B$.

PREUVE :

En effet, en multipliant par A^{-1} à gauche, on a
$A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow IX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$. ■

Exemple

Résoudre le système suivant :
$\begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ 6x + 2y = -5 \end{cases}$

Si on pose $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$,
le système peut s'écrire sous la forme $AX = B$.

Déterminer A^{-1} à l'aide de la calculatrice puis donner la solution du système.

Remarque

Les solutions du système sont les coordonnées du point d'intersection des doites $d1 : 10x + 4y = 3$ et $d2 : 6x + 2y = -5$. Ces droites ont pour vecteurs directeurs $\vec{v}_1(-4; 10)$ et $\vec{v}_2(-2; 6)$.
Ce système a une unique solution si les droites ont des vecteurs directeurs non colinéaires, c'est à dire si $-4 \times 6 + 10 \times 2 \neq 0$ ou si $10 \times 2 - 6 \times 4 \neq 0$.
Généralisation : Le système qui a pour matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ admet une unique solution ssi $ad - bc \neq 0$

Exemple

Résoudre le sytème :

$$\begin{cases} 2x + 3y - t = 5 \\ x - t = 2 \\ 3 - y = 0 \end{cases}$$

III Puissance n-ième d'une matrice carrée

Définition 6

On considère un entier naturel n non nul et une matrice A.
La puissance nième de A, notée A^n, est la matrice :

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n facteurs}.$$

Remarque

Le produit de matrices étant associatif, pour tout entier $n \geqslant 0$: $A^{n+1} = A \times A^n = A^n \times A$, ce qui rend valable la définition.
Cette relation permet de calculer de proche en proche les puissances de A.

Propriété 7

Pour tous les entiers naturels n et m et toute matrice A :

$$A^m \times A^n = A^{m+n}.$$

Propriété 8 (Matrices diagonales)

Soit une matrice diagonale A d'ordre k. On pose $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_k \end{pmatrix}$.

Alors pour tout entier naturel n, $A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_k^n \end{pmatrix}$.

Dans le cas général, il n'existe pas de formule explicite donnant la puissance niéme d'une matrice A. En partique, on peut utiliser :
• le raisonnement par récurrence ; • des propriétés particulières de la matrice A.

Exemple

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, A^4.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
   $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Ecrire A en fonction de I et J.
2. Calculer J^2 et J^3.
3. Démontrer par récurrence que $A^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2} J^2$.
4. En déduire une expression de A^n.

Propriété 9

Soit A une matrice carrée. S'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$ alors
$A^n = PD^nP^{-1}$.

PREUVE :
$A^n = (PDP^{-1})^n = PD\underbrace{P^{-1}P}_{=I}DP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$. ■