



Matrices et suites

Dans ce chapitre, U_n est une matrice colonne d'ordre 2 ou 3 et A est une matrice carrée de même ordre 2 ou 3.

Propriété 1 ($U_{n+1} = AU_n$)

Si une suite U_n vérifie une relation de récurrence du type :

$$U_{n+1} = AU_n.$$

Alors $U_n = A^n U_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

PREUVE :

Démontrons par récurrence la propriété (P_n), $U_n = A^n U_0$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $A^0 = I$, donc $U_0 = A^0 U_0$.

Hérédité :

Supposons que pour un entier n quelconque $U_n = A^n U_0$ et démontrons que $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$.

• $U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0$ d'après notre hypothèse de récurrence.

donc $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$. ■

Exemple

Une suite récurrente d'ordre 2 est une suite (u_n) qui vérifie une relation du type :

$$(1) u_{n+2} = au_n + bu_{n+1}.$$

Si on note $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$.

La relation (1) est équivalente à $U_{n+1} = AU_n$.

Par conséquent, $U_n = A^n U_0$.

Retour sur la suite de Fibonacci.

Ecrire U_n en fonction de n . En déduire u_n en fonction de n .

Exemple

Soient deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant :

$$\begin{cases} u_{n+1} = -2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases} \text{ avec } u_0 = 3 \text{ et } v_0 = -2.$$

On pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Calculer A^2 , puis A^3 .
3. Donner A^n .
4. Donner u_n et v_n en fonction de n .

Propriété 2 ($U_{n+1} = AU_n + B$)

Soit B une matrice colonne de même ordre que A et U_n .

Pour étudier une suite de matrice vérifiant la relation : $U_{n+1} = AU_n + B$

- On cherche une matrice colonne C telle que $C = AC + B$.

Si $I - A$ est inversible alors $C = (I - A)^{-1}B$.

- On pose $V_n = U_n - C$ et la suite (V_n) vérifie la relation :

$V_{n+1} = AV_n$. Par conséquent, $V_n = A^n V_0$

- On revient à la suite (U_n) , $U_n = V_n + C = A^n V_0 + C$.

D'où, $V_n = A^n(U_0 - C) + C$.

Exemple

Exercice 1p151 (Livre)