

Exercice 1 :

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance j le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance m , le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, alors $j = 14$ et $m = 5$.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12. Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37. Ajoutez les deux nombres obtenus. Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire »

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare : « Votre anniversaire tombe le 1^{er} août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1^{er} août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.
2. (a) Pour un spectateur donné, on note z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).
Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que $z \equiv m \pmod{12}$.
- (b) Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 455 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m , le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables

j, m, z sont des entiers.

Traitement

Pour m

Pour j

Donner à z la valeur $12j + 31m$

Si ... Alors

Afficher j et m

1. Compléter cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que :
$$12j + 31m = 503.$$
2. Quelle est alors la date d'anniversaire correspondante ?

DEVOIR MAISON N° 1, Correction

Exercice 1 :

Partie A

- Une personne née le 1^{er} août, le programme de calcul (A) donne le nombre 308 :
 - Numéro du jour de naissance multiplié par 12 : $1 \times 12 = 12$;
 - Numéro du mois de naissance multiplié par 37 : $8 \times 37 = 296$;
 - $12 + 296 = 308$.
- (a) Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

$$z = 12j + 37m, \text{ or } 12j \equiv 0 [12], \text{ donc } z = 12j + 37m \equiv 37m [12]$$

- (b) Date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A) :

$$\begin{cases} z = 474 = 39 \times 12 + 6 \\ z \equiv 37m [12] \end{cases} \implies z = (3 \times 12 + 1)m \equiv 6 [12] \implies m \equiv 6 [12], \text{ le mois est donc juin}$$

$$z = 474 = 12j + 37 \times 6 \implies 12j = 474 - 37 \times 6 = 252 = 21 \times 12 \implies j = 21$$

Le spectateur est donc né un 21 juin.

Partie B

Le magicien décide de changer son programme de calcul. Pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m , le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

- Première méthode :

Algorithme modifié (AlgoBox) pour qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j + 31m = 503$.

```
1  VARIABLES                                13      AFFICHER j
2  j EST_DU_TYPE NOMBRE                    14      AFFICHER "\ "
3  m EST_DU_TYPE NOMBRE                    15      AFFICHER m
4  z EST_DU_TYPE NOMBRE                    16      AFFICHER "; "
5  DEBUT_ALGORITHME                        17      FIN_SI
6  POUR m ALLANT_DE 1 A 12                 18      FIN_POUR
7  DEBUT_POUR                               19      FIN_POUR
8  POUR j ALLANT_DE 1 A 31                  20      FIN_ALGORITHME
9  DEBUT_POUR
10 z PREND_LA_VALEUR 12*j+31*m             ***Algorithme lancé***
11 SI (z==503) ALORS                       29\ 5;
12 DEBUT_SI                                 ***Algorithme terminé***
```

Le spectateur est donc né un 29 mai.

- Deuxième méthode :

- (a) $12a \equiv 0 [12]$ pour tout a entier, donc

$$z = 12j + 31m \equiv 31m = (2 \times 12 + 7)m = 12 \times 2m + 7m \equiv 7m [12]$$

$7m$ et z ont donc le même reste dans la division euclidienne par 12.

- (b) Pour m variant de 1 à 12, reste de la division euclidienne de $7m$ par 12 :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
reste	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5	0

On remarque qu'à chacun des 12 restes possibles correspond un seul mois.

- (c) Date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B) :

$$\begin{cases} z = 503 = 41 \times 12 + 11 \\ z \equiv 7m [12] \end{cases} \implies 7m \equiv 11 [12] \implies m = 5, \text{ le mois est donc mai}$$

$$z = 503 = 12j + 31 \times 5 \implies 12j = 503 - 31 \times 5 = 29 \times 12 \implies j = 29$$

Le spectateur est donc né un 29 mai.